AN ELEMENTARY TREATISE

ON THE

THEORY OF EQUATIONS

WITH A COLLECTION OF EXAMPLES

BY

I. TODHUNTER, M. A., F. R. S.

TRANSLATED INTO URDU

BY

MUNSHI MAHAMMAD ZAKA-UL-LAH,
Head Master, Normal School, Delhi

IN FURTHERANCE OF THE OBJECTS OF THE SCIENTIFIC SOCIETIES OF ALLYGURH AND SUBA BEHAR

رسالہ مسائل معادلات

معہ بہت سي مثالوں کے

مؤلفہ

ٹاڈ ہنٹر صاحب ام اے ایف آر ایس

جسکو

منشي محمد ذکاء الله صاحب هیڈ ماسٹر نارمل اسکول دهلي نے

بتائید مقاصد

سینٹیفک سوسئیٹي علیگڈه و سائنٹیفک سوسئیٹي صوبہ بہار

اُردو میں ترجمہ کیا

اور

بمقام دهلي مطبع مرتضوي میں باهتمام حاجي
محمد عزیزالدین کے مطبوع هوا

سنہ ١٨٧١ ع

ٹائیٹل پیج مطبوعہ انسٹیٹیوٹ علیگڈه

بسم اللہ الرحمن الرحیم

دیباچہ

اس رسالہ مین جملہ مسائل معادلات کی جو اکثر کتب اصولیہ مین ہوا کرتے ہین لکھی ہین اور اونکی ساتھ بہت سی مثالین یعنی ورسٹی کی سوالات امتحان سی منتخب کرکے تحریر کی ہین

مسائل معادلات مین اکثر عجیب و غریب اور دلچسپ ایسی نتایج ہوتی ہین کہ اگر طالب علم ابتداءً تحصیل علوم ریاضیہ مین اون کو تحصیل کرلے تو بہت فایدی اوسکو حاصل ہوتی ہین اس رسالہ کو وہی طالب علم پڑہ سکتی ہین جو الجبرا سی خوب ماہر ہین اسمین کہین بڑی علم کی ضرورت سواء دفعات ۱۷۵ و ۲۶۷ و ۳۰۸ - ۳۱۴ کے نہین پڑتی ان دفعات کو طالب علم جب تک نہ مطالعہ کرین کہ وہ علم مثلث مین ضابطہ ڈی مواور سے واقف ہون یہہ کتاب حقیقت مین ایک ضمیمہ بڑی جبر مقابلہ کا ہی اسلئی اس کتاب مین حوالہ جا بجا جبر مقابلہ کی دفعات کا دیا گیا ہے

اس رسالہ مین ایسی تحقیقاتین بہت سی لکھی گئی ہین جنکا نام بہی کسی اور رسالہ مسائل معادلات مین نہین پایا جاتا مثلاً اونمین سی ایک کاچی کا ثبوت ہی کہ ہر مساوات کی ایک قیمت ہوتی ہی ہورنر کی ترکیب اور مسائل اسقاط اور ضابطہ کاچی صاحب کا خیالی قیمتون کی تعداد کی بیان مین اور ضابطہ مقطعات کا عرض یہہ مضامین اور بعض اور اوسکی اسی کتاب مین اول اول لکھی گئی ہین ———

جناب ٹوڈہنٹر صاحب کی تصنیفات مین یہہ عجیب کتاب ہے فہرست مضامین یہہ ہے

دیباچہ

(۱) جبر مقابلہ کی بائیسوین باب مسائل مساوات مین طالب علم نی پڑہا ہوگا کہ مساوات الا٢ + ب لا + ح = ۰ کی دو قیمتین یعنی

$$\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{2} - ۴ اح}}{۲ ا}$$

ہین اوران قیمتون کی کیفیت یہہ ہی کہ اونکا مجموعہ برابر ہی $-\frac{ب}{ا}$ کی اور حاصل ضرب برابر ہے $\frac{ج}{ا}$ کی یعنی مجموعہ ان قیمتون کا برابر ہی مساوات لا٢ + $\frac{ب}{ا}$ لا + $\frac{ج}{ا}$ = ۰ کی دوسری رقم کی سر کی جسکی علامت بدلی ہوئی ہی اور اونکا حاصل ضرب برابر ہی اس مساوات کی اخر رقم کے پس اے طالب علم اس مضمون کو خوب غور سی خیال کر کی سمجہہ لی کہ اس رسالہ کی تمام مضامین اسی قسم کی ہین جبر مقابلہ مین تو مساوات درجہ دوم کی خواص بیان ہوئی یہان مساوات درجہ دوم سی اعلی درجہ کی مساواتون کے خواص اور مسائل بیان ہونگی گویا یہہ اوسیر جو ہم نی لکہا ہی وہ ایک نمونہ ہی اوسپر قیاس کر کی طالب علم اس کتاب کے ساری مضامین کا تصور ذہن مین پیدا کر سکتا ہی —— یہہ نتایج اور مسائل جو بیان ہونگی وہ اور فروع ریاضیہ مین کام ائینگے اوران مسائل کی مشق طلبہ کی واسطی نہایت سودمند ہوگی جو طالب علم کہ علم جبر مقابلہ جانتی ہین اونکو اس قبیل کی مشق چندان مشکل اور دشوار ہی نہین یہہ ایک مضمون بوقلمون اونکی توجہ اور مطالعہ کی عادت بڑہانی کی واسطی ایک عجب چیز ہے

(۲) مساوات اور قیمت مساوات کے معنی طلبہ علم جبر مقابلہ مین خوب سمجہہ گئی ہونگی مگر ہم اونکی یہان تعریف پہر لکہتی ہین جسسی مطلب خوب صاف اور عیان ہوجاے

جس جبریہ جملی مین لا مندرج ہو اوسکو جملہ لا کا کہتی ہین اور ج (لا) سی تعبیر کرتی ہین اور جو مقدار لا کی جگہ ج (لا) مین رکہی جای اور وہ ج (لا) کو فنا اور نابود کردی اوسکو قیمت مساوات

ج (لا) = ۰ کی کہتے ہین (اس ساری کتاب مین مساوات اور معادلہ کی ایک ہی معنی ہین مترجم)

$$ا\,لا^{ن} + ب\,لا^{ن-۱} + س\,لا^{ن-۲} + \ldots + ک\,لا + ل$$

کی صورت کا جو جملہ ہو اور اوسمین ن مثبت صحیح عدد ہو اور مثال ا د ب و س . . ک د ل

مین لا دخل نہ رکہتا ہو تو اوسکو ن درجہ کا صحیح جملہ ناطق لا کا کہتے ہین اور اگر ہم کو یہہ دریافت کرنا ہو

کہ وہ کونسی لا کی قیمت ہی کہ اس جملہ کو فنا کرتی ہی تو اوسکی یہہ معنی ہونگی کہ ہم ن درجہ کی صحیح ناطق مساوات

کی قیمت دریافت کرتی ہین اس رسالہ مین ہماری بحث اسی مساوات پر ہوگی اسی مساوات مین اگر ہم

چاہین تو لا کی قوت اعلی کی مثال پر مساوات کو تقسیم کرکی سر اوس اعلی قوت کا ایک بنا لین تو

مساوات کی یہہ صورت ہو جائیگی

$$لا^{ن} + ع_{۱}\,لا^{ن-۱} + ع_{۲}\,لا^{ن-۲} + \ldots + ع_{ن-۲}\,لا^{۲} + ع_{ن-۱}\,لا + ع_{ن} = ۰$$

اس مساوات کو سادہ صورت مساوات کہتی ہین اور اس سادگی کی کیفیت آگی کہل جائیگی جب لا^ن

کا سر ایک ہوتا ہی تو خواص مساواتون کی بہت ٹہیک ٹہیک اور درست بیان ہوتی ہین اور جب یہہ سر نہین ہوتا تو

مساواتون کی خواص بیان کرتی مین کچہہ دقت پڑتی ہی اگر ہم کو یہہ منظور نہ ہو کہ لا^ن کے مثال کو

واحد بنائین تو اوسکو ع سی تعبیر کرین تو مساوات کی یہہ صورت ہو جائیگی

$$ع_{۰}\,لا^{ن} + ع_{۱}\,لا^{ن-۱} + ع_{۲}\,لا^{ن-۲} + \ldots + ع_{ن-۲}\,لا^{۲} + ع_{ن-۱}\,لا + ع_{ن} = ۰$$

(۳) یہہ ہمیشہ یاد رکہنی کی بات ہی کہ ہماری مساوات یا معادلہ سی مراد یہہ ہوتی ہی کہ صحیح ناطق مساوات ہے

اور اگر وہ مساوات اس صورت کی نہ ہو تو تحویلات جبریہ سی اس صورت کی طرف تحویل ہو سکتی ہے

مثلاً مساوات $ا\,لا^{۲} + ب\,لا + س\,\sqrt{لا} = ف$ تو یہہ مساوات مساوات منطق کی طرف

اسطرح تحویل ہو سکتی ہی کہ $س\,\sqrt{لا}$ اور ف کو منتقل کرکی مجذور کر لین تو مساوات منطق صحیح درجہ

چہارم کی بنجائیگی جن مساواتون مین لوکارثمی جملی یا قوت نمای جملی یا علم مثلثی جملی یا اصم جملی

مندرج ہون وہ ہمارے تحقیقات کی اندر بالتصریح داخل نہین ہونگین مثلاً اس قسم کی مساواتین

کہ $لا - ی^{لا} = ۰$ اور $لا لوک لا - ۱ = ۰$ داخل نہین ہو مگر ہماری تحقیقات مین ضمناً ایسی مساواتون

ہر کہ خارج از بحث ہین کچھہ نہ کچھہ اپنا تصرف دکھائینگے

جہان کہین ہم جملہ ج (لا) لکھین تو اوسی ہماری ہمیشہ جملہ صحیحہ ناطقہ لا سی مراد ہوگی بشرطیکہ اوسکے خلاف نہ بیان کیا گیا ہو

(۴) ایک بڑی بات امثال ع. ع ا ع ۲ ... ع ن کی نسبت اس مساوات

$$ع. لا^ن + ع_۱ لا^{ن-۱} + ع_۲ لا^{ن-۲} + ... + ع_{ن-۲} لا^۲ + ع_{ن-۱} لا + ع_ن = ۰$$

مین بیان ہوتی ہی مساوات درجہ دوم ا لا^۲ + ب لا + ح = ۰ کو ہم حل کرسکتی ہین خواہ ا اور ب اور س کو جانین یا نہ جانین کہ وہ کونسی خاص اعداد ہین ہم فقط اتنی بات جاننی کی محتاج ہین کہ ا اور ب اور س ایسی ہین کہ وہ لا سی کچھہ لگاؤ نہین رکھتی مثلاً مساوات لا^۲ - ۱۲ لا + ۱۵ = ۰ کی حل کرنی ہو تو خواہ ۱۵ کو منتقل کرکی مجذور کامل بنائین اور حسب دستور حل کرین یا دفعہ اول مین جو صورت عامہ لکھی ہوئی ہی اوسمین ا = ۱ اور ب = -۱۲ اور ح = ۱۵ کے لکھین

اگر ہم ایسی مساوات حل کرنی چاہین کہ اوسمین اول سی امثال کی واسطی عددی قیمتین نہ معین ہوئی ہون تو ایسی حل کو ہم حل جبریہ مساوات کا کہتی ہین اور اگر ہم حل جبریہ مساوات عامہ کا حاصل کرلین تو جس درجہ کی مساوات کا یہ حل ہوگا اوس درجہ کی مساوات کا حل عددی فقط اوس صورت عامہ کی امثال کی جگہ اعداد اوس حل جبریہ مین رکھنی سی حاصل ہوجائیگا جب آگے ہم پڑہینگے تو یہہ بات ہم کو معلوم ہوگی کہ حل جبریہ فقط چوتھی درجہ کی مساوات تک کا ہوسکتا ہے مگر تیسرے درجہ اور چوتھی درجہ کی مساواتون کی امثال عددی جب اوس درجہ کی صورت مساوات عامہ کی حل جبریہ مین رکھتی ہین تو نتایج ایسی حاصل ہوتی ہین کہ وہ عملاً کسی کام کی نہین ہوتی اور چوتھی درجہ کی مساوات سی زیادہ درجہ کی مساواتون کا حل جبریہ ابتک نہین ہوا اور نہ اایندہ اوسکی ہونی کی امید ہے

مگر وہ حل جسکو ہم حل حسابیہ معادلات کا کہتی ہین اور جسمین امثال عددی ہوتی ہین اوسمین زیادہ کارروائی کامیابی کی ساتھہ ہوسکتی ہی مثلاً پانچوین درجہ کی مساوات عامہ

کا حل جبریہ کسی طرح نہین ہو سکتا مگر حل حسابیہ مین جسا لگانی سی پانچوین درجہ کی مساوات کا جسمین امثال اعداد ہون حل حاصل ہو سکتا ہی اور یہہ تو ضرور ہی کہ قیمت تقریبی حاصل کر لین جیسی چاہین

(۵) اس جملہ $ع_0 لا^{ن} + ع_1 لا^{ن-1} + ع_2 لا^{ن-2} + \dots + ع_{ن-2} لا^2 + ع_{ن-1} لا + ع_ن$ کو ج (لا) سی تعبیر کرین اور اس جملہ کی قیمت جو لا کی جگہ ا رکھنی سی ہو اوسکو ج (ا) سی تعبیر کرین تو ہم یہہ بتلائینگے کہ ج (ا) کی عددی قیمت کا حساب ج (لا) کی امثال اور خود ا کو خاص اعداد کے فرض کرنی سی بہت آسانی سی ہو جاتا ہے

مثلاً تیسرے درجہ کا جملہ لو تو ہم عددی قیمت

$$ع_0 ا^3 + ع_1 ا^2 + ع_2 ا + ع_3$$

کی دریافت کرنی چاہتے ہین

اول یہہ حاصل ہوتا ہے کہ $ع_0 ا$

$ع_1$ کو جمع کرو تو یہہ حاصل ہوگا $ع_0 ا + ع_1$

ا مین ضرب دو تو یہہ حاصل ہوگا $ع_0 ا^2 + ع_1 ا$

$ع_2$ کو زیادہ کرو تو یہہ حاصل ہوگا $ع_0 ا^2 + ع_1 ا + ع_2$

ا مین ضرب دو تو یہہ حاصل ہوگا کہ $ع_0 ا^3 + ع_1 ا^2 + ع_2 ا$

$ع_3$ زیادہ کرو تو یہہ حاصل ہوگا $ع_0 ا^3 + ع_1 ا^2 + ع_2 ا + ع_3$

اس عمل کو اس ترتیب سے لکھو کہ

$ع_0$	$ع_1$	$ع_2$	$ع_3$
	$ع_0 ا$	$ع_0 ا^2 + ع_1 ا$	$ع_0 ا^3 + ع_1 ا^2 + ع_2 ا$
	$ع_0 ا + ع_1$	$ع_0 ا^2 + ع_1 ا + ع_2$	$ع_0 ا^3 + ع_1 ا^2 + ع_2 ا + ع_3$

ج (لا) کتنی ایک درجہ کا ہو اوسپر اسی عمل کو مرعی رکھو مثلاً عددی قیمت $3لا^4 - 2لا^3 - 5لا + 7$ کی جب $لا = 3$ ہو دریافت کرنی ہو

۳	۲-	۰	۵-	۷+
	۹+	۲۱	۶۳+	۱۷۴+
۳	۷+	۲۱+	۵۸+	۱۸۱+

پس حاصل ۱۸۱ ہوا

(۶) اگر لا = ا کی کسی جملہ صحیحہ ناطقہ کو فنا کری تو وہ جملہ پورا لا - ا پر تقسیم ہوگا

فرض کرو کہ ج (لا) اوس جملہ کو تعبیر کری اور ہم کو یہہ معلوم ہی کہ ج (لا) = ۰ تو ہم کو یہہ ثابت کرنا ہی کہ ج (لا)
لا - ا پر پورا تقسیم ہوگا

ج (لا) کو لا - ا پر موافق قاعدہ مروج جبریہ کی تقسیم کی جاؤ جب تک کہ باقی مین لا نہ رہی
اور فرض کرو کہ ق خارج قسمت ہی اور اگر کوئی باقی رہتی ہی تو وہ ر ہی تو

ج (لا) = ق (لا - ا) + ر اس متطابقہ مین لا کی جگہ ا رکہو تو اس سبب سے کہ
ق جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ہی تو وہ لا = ا کی کہنی سی لانہایت نہین ہو سکتا اسواسطی جب لا = ا کی ہو
تو ق (لا - ا) فنا ہو جائیگا اور بموجب فرض کی لا = ا کے ہونی سی ج (لا) بہی فنا ہوتا ہے
اسلئی جب لا = ا کے ہو تو ر بہی فنا ہوتا ہی اور چونکہ ر مین لا نہین ہی تو جب وہ لا = ا کے
ہونی سی فنا ہوتا ہی تو وہ ہمیشہ فنا ہوگا یعنی ر = ۰ اور لا - ا تقسیم ج (لا) کو پورا کرتا ہے

(۷) جس مسئلہ کا ثبوت اوپر لکہا ہی وہ ثبوت ایک عظمت رکہتا ہی اور سمجہ کو بڑہاتا ہی مگر اوسکے
ثبوت کو ایک اور طرح لکہتی ہین اوسمین خارج قسمت ق کی ایسی صورت ظاہر ہوتی ہی کہ اوسی ور زیادہ فایدہ
ہوتا ہی فرض کرو کہ

$$\text{ج}(\text{لا}) = \text{ع}_{۰}\,\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ع}_{۱}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{ع}_{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \cdots + \text{ع}_{\text{ن}-۲}\,\text{لا}^{۲} + \text{ع}_{\text{ن}-۱}\,\text{لا} + \text{ع}_{\text{ن}}$$

پہر جملہ ج (ا) = ۰ تو ج (لا) = ج (لا) - ج (ا)

$$= \text{ع}_{۰}(\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ا}^{\text{ن}}) + \text{ع}_{۱}(\text{لا}^{\text{ن}-۱} - \text{ا}^{\text{ن}-۱}) + \text{ع}_{۲}(\text{لا}^{\text{ن}-۲} - \text{ا}^{\text{ن}-۲}) + \cdots + \text{ع}_{\text{ن}-۱}(\text{لا} - \text{ا})$$

اب جبر مقابلہ کی دفعہ ۴۸۳ کی موافق $\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ا}^{\text{ن}}$ اور $\text{لا}^{\text{ن}-۱} - \text{ا}^{\text{ن}-۱}$ ... مین سے ہر یک لا - ا پر
پوری تقسیم ہوتی ہی اب اس تقسیم کے کرنے سی ہم کو خارج قسمت یہہ حاصل ہوگا کہ

$$ع_{۰}\,(لا^{ن-۱} + ا\,لا^{ن-۲} + ا^{۲}\,لا^{ن-۳} + \ldots + ا^{ن-۲}\,لا + ا^{ن-۱})$$

$$+\,ع_{۱}\,(لا^{ن-۲} + ا\,لا^{ن-۳} + ا^{۲}\,لا^{ن-۴} + \ldots + ا^{ن-۲})$$

$$+ \ldots$$

$$+\,ع_{ن-۲}\,(لا + ا)$$

$$+\,ع_{ن-۱}$$

اب اس خارج قسمت کو اس ترتیب سی لکھتی ہین کہ

$$ع_{۰}\,لا^{ن-۱} + (ع_{۰}\,ا + ع_{۱})\,لا^{ن-۲} + (ع_{۰}\,ا^{۲} + ع_{۱}\,ا + ع_{۲})\,لا^{ن-۳} + \ldots$$

$$+\,ع_{۰}\,ا^{ن-۱} + ع_{۱}\,ا^{ن-۲} + \ldots + ع_{ن-۱}$$

اور اسکو ہم

$$ق_{۰}\,لا^{ن-۱} + ق_{۱}\,لا^{ن-۲} + ق_{۲}\,لا^{ن-۳} + \ldots + ق_{ن-۲}\,لا + ق_{ن-۱}$$

سے تعبیر کرتی ہین

اسواسطے یہہ امثال جدید امثال قدیم سی ان صور جبریہ مین اسطرح مربوط ہوتے ہین

$ق_{۰} = ع_{۰}$ اور $ق_{۱} = ا\,ق_{۰} + ع_{۱}$ اور $ق_{۲} = ا\,ق_{۱} + ع_{۲}$

اور $ق_{۳} = ا\,ق_{۲} + ع_{۳}$ . . . .

یعنی ھر یک امثال جدید اسطرح حاصل ہوتا ہی کہ ہر یک امثال جدید کو اوسکی ماقبل کے امثال جدید مین ضرب دو اور ماحصل پر متناظرہ امثال قدیم زیادہ کرو اور یہہ بہی خیال کرنا چاہیے کہ ہر یک امثال جدید دفعہ ۵ کے عمل سی حاصل ہوتا ہے

(۸) اگر ج (لا) ایک جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ہو اور اوسکو لا ـ ا تقسیم کرنا ہو تو ا قیمت مساوات ج (لا) = ۰ کے ہوگی

دلیل فرض کرو کہ ج (لا) کو جب لا ـ ا پر تقسیم کرین تو خارج قسمت ق نکلتا ہی تو ج (لا) = ق (لا ـ ا)

اگر اس مطابقہ مین لا کی جگہ ا رکہین تو ق کی لا انتہا نہ ہونی کی سبب سے ق (لا ـ ا)

فنا ہوتا ہی پس جب لا = ا کے ہو تو ج (لا) فنا ہوتا ہی اسواسطی اقیمت مساوات

ح (لا) = ۰ کی ہے

(۹) جب کوی جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا لا − س پر تقسیم کیا جاے اور س ایک مقدار مستقل ہو تو باقی کو دریافت کرو

فرض کرو کہ ج (لا) جملہ صحیحہ ناطقہ لا کو تعبیر کرتا ہی اور ج (لا) کو لا − س پر تقسیم کرو جب تک کہ باقی کو کچھہ لگاؤ لا سی نہ رہی اور ق خارج قسمت نکلی اور ر باقی رہی تو

ح (لا) = ق (لا − س) + ر

اس متطابقہ مین س کی جگہ لا رکھو تو ق لانہایت ہوگا اور اسیواسطے ق (لا − س) فنا ہوگا اور ح (س) = ۰ یعنی جب لا = س کی ہو تو ر برابر ح (س) کے ہوگا اور ر مین لا کے نہ شامل ہونی سی ہمیشہ ر برابر ح (س) کے ہوگا

مثلاً اگر ۳ لا^{۴} − ۲ لا^{۳} − ۵ لا + ۷ کو لا − ۳ پر تقسیم کرین تو خارج قسمت ۳ لا^{۳} + ۷ لا^{۲} + ۲۱ لا + ۵۸ ہوگا اور باقی ۱۸۱ رہینگی دفعات ۵ اور ۷ کو دیکھو

(۱۰) فرض کرو کہ ح (لا) جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ہی اور لا کی جگہہ لا + د رکھو اور ح (لا + د) کو موافق قواعد کے لکھو اور مختلف قوا د کے امثال دریافت کرو

فرض کرو کہ ح (لا) = ع. لا^{ن} + ع$_{۱}$ لا$^{ن-۱}$ + ع$_{۲}$ لا$^{ن-۲}$ + ... + ع$_{ن-۱}$ لا + ع$_{ن}$ تو

ح (لا + د) = ع. (لا + د)^{ن} + ع$_{۱}$ (لا + د)$^{ن-۱}$ + ع$_{۲}$ (لا + د)$^{ن-۲}$ + . . . + ع$_{ن-۱}$ (لا + د) + ع$_{ن}$

(لا + د)^{ن} اور (لا + د)$^{ن-۱}$ . . . کو بموجب ضابطہ جملہ ثنائی کی پہیلاؤ اور کل ماحصل کو موافق قواعد کے لکھو تو ح (لا + د) کے واسطی یہہ سلسلہ حاصل ہوگا کہ

ع. لا^{ن} + ع$_{۱}$ لا$^{ن-۱}$ + ع$_{۲}$ لا$^{ن-۲}$ + . . . + ع$_{ن-۱}$ لا + ع$_{ن}$

+ د [ن ع. لا$^{ن-۱}$ + (ن − ۱) ع$_{۱}$ لا$^{ن-۲}$ + (ن − ۲) ع$_{۲}$ لا$^{ن-۳}$ + . . . ع$_{ن-۱}$]

+ د^{۲}/۱.۲ [ن (ن − ۱) ع. لا$^{ن-۲}$ + (ن − ۱) (ن − ۲) ع$_{۲}$ لا$^{ن-۳}$ + . . . + ۲ ع$_{ن-۲}$]

+ . . . .

+ د^ر/|ر [ن (ن-۱) . . . (ن-ر+۱) ع. لا^(ن-ر) + (ن-۱)(ن-۲) (: (ن-ر) ع۱ لا^(ن-ر-۱) + . .]

+ . .

+ د^ن/|ن [|ن ع.]

اول سطر اس جملہ کی تو ج (لا) ہی اور دکی امثال کو ہم جَ (لا) سے اور

امثال د^۲/(۱×۲) کو جً (لا) سی اور امثال د^۳/|۳ کو جً (لا) سی اور علی ہذا القیاس تعبیر کرو

یہہ طریقہ کتاب خالی از دقت او سوقت نہ ہوگا کہ بہت سی زبرین لگانی پڑینگے

پس عموماً ہم د^ر/|ر کی امثال کو حَ^ر (لا) سے تعبیر کرتے ہین اسی معلوم ہوا کہ

ح (لا+د) = ح لا + دجَ (لا) + د^۲/(۱×۲) حً (لا) + د^۳/|۳ حً (لا) + . . .

. . . + د^ر/|ر ج^ر (لا) + . . . + د^ن/|ن ح^ن (لا)

دیکھنے سی معلوم ہوتا ہی کہ ج (لا) و جَ (لا) و جً (لا) و حً (لا) . . . ح^ن (لا) اس قاعدہ

عامہ کی موافق تمام مربوط ہوتی ہین کہ ج^(ر+۱) (لا) کے حاصل کرنی کی واسطی ہم ہر ایک رقم جَ^ر (لا)

کو لا کے قوت نماءین جو اوس رقم مین ہو ضرب دیتی ہین اور اوس قوت نماءین سی ایک گھٹا کر

قوت نما بناتے ہین

(۱) فرض کرو کہ ج (لا) چوتھی درجہ کا ہے اور

ج (لا) = ع. لا^۴ + ع۱ لا^۳ + ع۲ لا^۲ + ع۳ لا + ع۴

تو جَ (لا) = ۴ع. لا^۳ + ۳ع۱ لا^۲ + ۲ع۲ لا + ع۳

جً (لا) = ۴ × ۳ ع. لا^۲ + ۳ × ۲ ع۱ لا + ۲ ع۲

جً (لا) = ۴ × ۳ × ۲ ع. لا + ۳ × ۲ ع۱

جً (لا) = ۴ × ۳ × ۲ ع.

ج (لا+د) = ج (لا) + دجَ (لا) + د^۲/|۲ جً (لا) + د^۳/|۳ جً (لا) + د^۴/|۴ جً (لا)

اگر ہم ع• ع۱ و ع۲ و ع۳ و ع۴ اور لا کی واسطے اعداد قیمتین مقرر کرین تو ج (لا) او ر ج َ (لا) ۰۰۰ کا
حساب دفعہ ۵ کی ترکیب کے موافق ہوسکتا ہی جب ہم ہورنر صاحب کی ترکیب یا واتون کی حل کرنی کی بیان
کرینگے تو اوسمین بتلائینگے کہ یہہ حساب کسطرح اسانی سی نہایت ضبط کی ساتھہ ہوسکتی ہین

(۱۲) اگر ہم سلسلہ ج (لا+ی) کا اغاز ی کی اعلی قوت سی کرین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{ج}(\text{لا}+\text{ی}) = \text{ع}_{\bullet}\,\text{ی}^{\text{ن}} + (\text{ع}_{1} + \text{ن}\,\text{ع}_{\bullet}\,\text{لا})\,\text{ی}^{\text{ن}-1} + \left[\text{ع}_{2} + (\text{ن}-1)\,\text{ع}_{1}\,\text{لا} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{1\times 2}\,\text{ع}_{\bullet}\,\text{لا}^{2}\right]\text{ی}^{\text{ن}-2}$$
$$+\left[\text{ع}_{3} + (\text{ن}-2)\,\text{ع}_{2}\,\text{لا} + \frac{(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)}{1\times 2}\,\text{ع}_{1}\,\text{لا}^{2} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)}{\lfloor 3}\,\text{ع}_{\bullet}\,\text{لا}^{3}\right]\text{ی}^{\text{ن}-3}$$
$$+\left[\text{ع}_{\text{ر}} + (\text{ن}-\text{ر}+1)\,\text{ع}_{\text{ر}-1}\,\text{لا} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)\cdots(\text{ن}-\text{ر}+1)}{\lfloor \text{ر}}\,\text{ع}_{\bullet}\,\text{لا}^{\text{ر}}\right]\text{ی}^{\text{ن}-\text{ر}}$$
$$+\cdots+\text{ج}(\text{لا})$$

جو صورت ہم نی ج (لا+ی) کی اوپر بہی لکہی ہی اوسی یہہ صورت مستنبط ہوسکتی ہی یا ج (لا+ی) کے
ہر رقم کو پہیلا کر لکہین اور ی کی قواء متنازلہ کی ترتیب سی لکہین تو یہی مطلب حاصل ہوجایگا

(۱۳) جملہ ج َ (لا) کو ج (لا) کا اول جملہ مشتقہ اور ج ً (لا) کو دوم جملہ مشتقہ اور
علی ہذا القیاس کہتی ہین جب طالب علم اصول علم مفصولات سی واقف ہوگا تو اوسکو معلوم ہوگا کہ ہر جملہ
مشتقہ اپنی ما قبل کی جملہ کا سر مفصول بلحاظ لا کی ہوتا ہی اور ج (لا+ی) کے واسطی جو جملہ قواء
ی مین لکہا ہی وہ ایک مثال ٹیلر صاحب کے ضابطہ کی ہے

علاوہ برین یہہ امر بہی ملحوظ خاطر رہی کہ ج ً (لا) جسطرح ج َ (لا) سی استخراج ہوتا ہے اوسطرح
ج َ (لا) کا ج (لا) سی مستنبط ہوتا ہی پس ج ً (لا) اول جملہ مشتقہ ج َ (لا) کا اور دوم جملہ
مشتقہ ج َ (لا) کا ہی اور علی ہذا القیاس اسی معلوم ہوا کہ بموجب دفعہ گذشتہ کی

$$\text{ج}'(\text{لا}+\text{ی}) = \text{ج}'(\text{لا}) + \text{ی}\,\text{ج}''(\text{لا}) + \frac{\text{ی}^{2}}{1\times 2}\,\text{ج}'''(\text{لا}) + \frac{\text{ی}^{3}}{\lfloor 3}\,\text{ج}''''(\text{لا}) + \cdots$$
$$+\cdots\frac{\text{ی}^{\text{ر}-1}}{\lfloor \text{ر}-1}\,\text{ج}^{\text{ر}}(\text{لا})\cdots + \frac{\text{ی}^{\text{ن}-1}}{\lfloor \text{ن}-1}\,\text{ج}^{\text{ن}}(\text{لا})$$

اور علی ہذا القیاس

$$\text{ج}''(\text{لا}+\text{ی}) = \text{ج}''(\text{لا}) + \text{ی}\,\text{ج}'''(\text{لا}) + \frac{\text{ی}^{2}}{1\times 2}\,\text{ج}(\text{لا}) + \cdots\cdots$$

$\cdots \frac{\cdots}{ر-۲} ج(لا) + \cdots + \frac{ن-۲}{ن-۲} ج^{ن}(لا)$

اور علی ہذا القیاس

(۱۴) لا کی کسی جملہ صحیحہ ناطقہ مین جو موافق قوار متنازلہ لا کی لکہا جاے ہر یک رقم کو جو اوسمین واقع ہوتی ہو لا کو کافی بڑہا کر ایسا بنا سکتی ہین کہ وہ اپنی سب مابعد کی رقمون کی مجموعہ سی جتنی گنی ہم چاہین ہو جای اور ہر یک رقم کو لا کو کافی گہٹا کر ایسا بنا سکتی ہین کہ وہ اپنی سب ماقبل کی رقمون کی مجموعہ سی جتنی گنی ہم چاہین ہو جاے

فرض کرو ع. لا^ن + ع~۱~ لا^ن-۱^ + ع~۲~ لا^ن-۲^ + ... + ع~ن-۲~ لا^۲^ + ع~ن-۱~ لا + ع~ن~

ایک جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ہو اور فرض کرو کہ ردین رقم $ع_{ر-۱} لا^{ن-ر+۱}$ واقع ہوتی ہے یعنی $ع_{ر-۱}$ صفر نہین ہی اور امثال $ع_{ر}$ و $ع_{ر+۱} \cdots ع_{ن}$ مین جو سب سے بڑا ہے اوسکی عددی قیمت ق ہے ردین رقم کی مابعد رقمون کا مجموعہ

$ق(لا^{ن-ر} + لا^{ن-ر-۱} + \cdots + لا + ۱)$ یعنی $ق \frac{لا^{ن-ر+۱} - ۱}{لا - ۱}$ سے زیادہ نہین ہو سکتا

اور ردین رقم کی نسبت اس مجموعہ کی ساتہہ $\frac{ع_{ر-۱} (لا-۱) لا^{ن-ر+۱}}{ق(لا^{ن-ر+۱} - ۱)}$

یعنی $\frac{ع_{ر-۱} (لا-۱)}{ق - \frac{ق}{لا^{ن-ر+۱}}}$ اب لا کو کافی بڑا فرض کرنی سی شمار کنندہ کو جتنا چاہین ہم بڑا کر سکتے ہین اور نسب نما کو برابر ق کی کر سکتی ہین اسلئی اس نسبت کو جتنا چاہین بڑہا لین

پس اسی دعوی کا پہلا جزو ثابت ہوا — اب دوسرے جزو کے ثابت کرنے کے لئے فرض کرو کہ $لا = \frac{۱}{ی}$ تو یہہ سلسلہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{۱}{ی^{ن}} \left\{ ع. + ع_{۱} ی + ع_{۲} ی^{۲} + \cdots + ع_{ن-۱} ی^{ن-۱} + ع_{ن} ی^{ن} \right\}$$

اب ہم کو یہہ ثابت کرنا ہی کہ لا کو کافی چہوٹا فرض کرکی یعنی ی کو کافی بڑا فرض کرکی کسی رقم $ع_{ر} ی^{ر}$ کو جو نفس الامر مین واقع ہوتی ہو نسبت مین اپنی سارے ارقام ماقبل کے $ع. + ع_{۱} ی + \cdots ع_{ن-۱} ی^{ر-۱}$ کی مجموعہ کی ساتہہ جتنا چاہین بڑہا دین اور یہہ اول ثابت ہو چکا ہی اسی دوسرا دعوی کا جزو ثابت ہوا

(۱۵) مسائل معادلات مین جو اول سوال ذہن مین آتا ہی وہ یہہ ہی کہ ہر مساوات ایک قیمت رکہتی ہی یا نہین

اب ہم بعض سیدہی سادہی مقدمات لکھینگے جسی یہہ ثابت ہوگا کہ خاص صورتون مین ایک قیمت کا وجود ہوتا ہی ایک مسئلہ کی ضرورت پڑتی ہی جسکو بدیہی جانکر تسلیم کر لیا کرتی ہین مگر ہم اوسکو دفعہ ذیل مین ثابت کرتے ہین

(۱۶) فرض کرو کہ ج (لا) ایک جملہ صحیحہ ناطقہ جملہ لا کا ہو اور اوسکی قیمتین ج (ا) اور ج (ب) موافق لا کی ا اور ب کی قیمتون کی ہون یعنی ج (لا) مین جب لا کی جگہ ا لکہین تو ج (لا) کی قیمت ج (ا) حاصل ہو اور علی ہذا القیاس ج (ب) تو لا جب ا سی بدل کر ب بنی گا تو ج (لا) ج (ا) سی بدل کر ج (ب) بنی گا اور ج (ا) اور ج (ب) کی سب درمیانی قیمتون پر اوسکی نوبت پہونچیگی اب فرض کرو کہ لا کی قیمت س لگائی جائی اور اسکی موافق ج (لا) کی قیمت ج (س) ہو اب لا کی واسطے ایک اور قیمت س + ھ مقرر کرو تو ھ کو کافی چہوٹا فرض کرنی سی ہم ج (س + ھ) اور ج (س) کے تفاوت کو جتنا چاہین کم کر سکتی ہین اسواسطے کہ

ج (س + ھ) = ج (س) + ھ جَ (س) + ھ² / ۱×۲ جً (س) + ۰۰۰ + ھ^(ن-۱) / [ن-۱ ج^(ن-۱) (س) + ھ^ن / [ن ج (س)

اب پہر بموجب دفعہ ۱۴ اکی ھ کو کافی چہوٹا فرض کرکے اول رقم سلسلہ ھ جَ (س) اور ھ² / ۱×۲ جً (س) اور ھ³ / [۳ جً (س) ۰ ۰ ۰ کو جو معدوم نہین ہوتی ایسا بنا سکتی ہین کہ وہ اپنی کل مابعد کی رقمون کے مجموعہ سی جتنی گنی ہم چاہین ہو جاے اور ھ کو کافی چہوٹا فرض کرنی سی یہہ رقم خود جتنی چہوٹی ہم چاہین بن سکتی ہی اسواسطی ج (س + ھ) - ج (س) کو جتنا چاہین ھ کو چہوٹا فرض کرکی بنا سکتی ہین اسی ثابت ہوتا ہی کہ لا جسطرح بتدریج بدلتا ہی اوسیطرح ج (لا) بتدریج بدلتا ہے اگر ج (لا) کی کوئی قیمت موافق قیمت مشخصہ لا کی ہو تو اوسکی دوسری قیمت پہلی قیمت کی قریب جتنی ہم چاہین موافق لا کی دوسری قیمت کی جو پہلی قیمت مشخصہ کے کافی قریب ہو لی سکتی ہین اسی معلوم ہوا کہ جب لا ا سی ب تک بدلتا ہی تو جملہ ج (لا) قیمت ج (ا) سی قیمت ج (ب) تک نوبت بہ نوبت بدلتا ہی اور اوسکی اندر کہین گسستگی نہین واقع ہوتی اسواسطی کہ اگر یہہ کہا جاے کہ اوسکی اندر گسستگی واقع ہوتی ہی تو اسکی یہہ معنی ہین کہ ہم لا کی ایسی قیمت نہین مقرر کر سکتی کہ وہ پہلی قیمت کی قریب ہماری مرضی کی موافق ہو

(۱۷) دفعہ گذشتہ میں ہم نے یہہ تو نہیں بیان کیا کہ ج (لا) ہمیشہ ج (ا) سے ج (ب) تک بڑہتا ہے یا ہمیشہ ج (ا) سے ج (ب) تک گہٹتا ہے اسلئے مختلف صورتیں ہونگی کبہی زیادہ ہوگا کبہی کم ہوگا لیکن یہہ ہم نے بیان کیا ہے کہ وہ نوبت بہ نوبت بتدریج قیمت ج (ا) سے قیمت ج (ب) تک تبدیل ہوتا ہے اور یہہ تبدل یکایک نہیں ہوتا بلکہ نوبت بہ نوبت ہوتا ہے یہہ ایک بڑا مقدمہ ہے اور اگر طالب علم اوسپر غور کریگا تو اوسکو بدیہات سے معلوم ہوگا کیونکہ یہہ بات ظاہر ہے کہ لا کی ہر متناہی قیمت کی موافق ج (لا) کی بہی متناہی قیمت ہوگی اور یہہ ہم نے ثابت کر دیا کہ اگر لا مے نہایت چہوٹی تبدیلی کیجائے تو ج (لا) میں بہی نہایت چہوٹی تبدیلی ہوگی پس اس سبب سے ج (لا) کے متواتر قیمتوں میں جو درجہ بدرجہ ہوتی ہیں کہیں گسستگی اور شکستگی نہیں واقع ہوگی

(۱۸) طالب علم اگر ہندسہ بالجبر سے واقف ہوگا تو اوسکو یہہ مضمون اوپر کا بڑا دلچسپ معلوم ہوگا وہ خطوط منحنی جو جملوں کو تعبیر کریں بنائیگا اور اون پر غور اسطرح کریگا کہ ج (لا) کو ے سے تعبیر کریگا پس ے = ج (لا) کو مساوات خط منحنی کی خیال کریگا اور پہر اس خط منحنی کے اوس حصہ کو جو درمیان لا = ا اور لا = ب کی واقع ہے فرض کریگا پہر اسی اوس کی ذہن میں یہہ عمدہ تصور پیدا ہوگا کہ ج (لا) کی واسطے جو قیمتیں مابین ج (ا) اور ج (ب) کی درمیان تشخیص کیجائیں اونمیں ضرور ہے کہ متواتر ہوا ور کہیں اونمیں گسستگی نہ واقع ہو

اس بات پر بہی لحاظ رہے کہ ا اور ب اور ج (ا) اور ج (ب) کی ساتہہ مثبت ہونے کی قید نہیں ہے ، ج (ا) اور ج (ب) کی مابینی قیمتوں کی معنی علم جبر مقابلہ کی موافق لئے گئے ہیں یعنی ہر مقدار کو ج (ا) اور ج (ب) کی مقدار مابینی کہینگے اگر ہے ج (ا) اور ج (ب) سے کے ایک سے علاوہ ہو

(۱۹) اگر لا کی جملہ صحیحہ ناطقہ ج (لا) میں لا کی جگہ دو عدد رکہی جائیں اور اونسے قیمتیں ج (لا) کی مختلف العلامت حاصل ہوں تو ضرور ہے کہ کم از کم ایک قیمت مساوات ج (لا) = ۰ کی لا کی اون قیمتوں کی درمیان واقع ہو .

فرض کرو کہ ا اور ب وہ قیمتیں ہیں تو ج (ا) اور ج (ب) مختلف العلامت بموجب فرض کے ہیں

اور بموجب دفعہ ۱۶ کی جب لا بتدریج وسی با تک بدلتا ہی تو جملہ ج (لا) بغیر کسی گستگی قیمت کی
ج (ا) سی ج (ب) تک بدلتا ہی لیکن اس سبب سے کہ ج (ا) اور ج (ب) مختلف العلامت ہیں
تو قیمت صفر کی اونکی درمیان واقع ہو گی اسلئی ضرور ہی کہ موافق کسی قیمت کی جو ا اور ب کے درمیان
واقع ہو ج (لا) برابر صفر کی ہو اور اسکی یہی معنی ہیں کہ مساوات ج (لا) = ۰
کی ایک قیمت درمیان ا اور ب کے واقع ہوتی ہے .

(۲۰) مساوات طاق درجہ کی ضرور ایک اصلی قیمت رکھتی ہے

غرض کرو کہ مساوات ج (لا) = ۰ سے تعبیر ہو یہاں

ج (لا) = ع. لاⁿ + ع₁ لاⁿ⁻¹ + ... + عن₋₁ لا + عن

اسمیں ن ایک طاق عدد ہی

جب لا کافی بڑا ہو تو بموجب دفعہ ۱۴ کی اول رقم ج (لا) کی یعنی ع. لاⁿ باقی ارقام کی مجموعہ سی بڑا ہو گا
اسواسطے ج (لا) کی علامت وہی ہو گی جو ع. لاⁿ کی علامت ہی پس لا کو کافی بڑا مقرر کرنے سے
اگر لا مثبت ہو تو ج (لا) کی وہی علامت ہو گی جو ع. کی علامت ہی اور اگر لا منفی ہو گا تو
ج (لا) کی علامت مخالف ع. کی علامت کی ہو گی پس اس سبب سے کہ لا کی ایک مناسب مثبت قیمت
جب بدل کر ایک مناسب منفی قیمت ہو جاتی ہی تو علامت ج (لا) کی بدلتی ہی ضرور ہی کہ ایک قیمت
درمیانی لا کی ایسی ہو کہ ج (لا) کو معدوم کر دی اسکی یہہ معنی ہیں کہ مساوات ج (لا) = ۰ کی ایک اصلی قیمت ہے
اب ہم یہہ دریافت کر سکتی ہیں کہ یہہ قیمت مثبت ہو گی یا منفی اسواسطی کہ جب لا کی واسطی صفر رکھیں
تو ج (لا) کی علامت وہی ہو گی جو عن کی علامت ہی پس اگر ع. اور عن کی ایک ہی علامت ہو
تو عن/ع. مثبت ہی تو مساوات ج (لا) = ۰ کی یقینی ایک منفی قیمت ہو گی اور اگر ع. اور عن
کی مختلف علامتیں ہوں تو عن/ع. ایک معدار منفی ہو گی سو اسطی یقینی ایک مثبت قیمت مساوات
ج (لا) = ۰ کی ہو گی پس اگر مساوات طاق درجہ کی ہو اور سب سے لا کی اعلی قوت کی امثال ہے
مساوات کو تقسیم کر کی سادی صورت اوسکی بنائیں تو ایک اصلی قیمت مساوات ہو گی جسکی

علامت متضاد آخر رقم کے علامت کے ہوگی

(۲۱) ایک مساوات زوج درجہ کی ہو اور صورت سادہ رکھتی ہو اور اوسکی آخر رقم منفی ہو تو اوسکی
دو اصلی قیمتین مختلف العلامت ضرور ہونگین

فرض کرو کہ ج (لا) = ۰ مساوات ہو تو جب لا صفر ہوگا تو بموجب فرض کے
ج (لا) منفی ہوگا جب لا کافی بڑا ہو تو ج (لا) مثبت ہوگا خواہ لا مثبت ہو یا منفی پس
کوئی منفی قیمت لا کی ایسی ہی کہ ج (لا) کو معدوم کرتی ہی اور نیز کوئی مثبت قیمت بھی ایسی ہے کہ
ج (لا) کو معدوم کرتی ہی یعنی مساوات ج (لا) = ۰ کی یقینی ایک مثبت قیمت اور ایک منفی قیمت ہی

(۲۲) اگر جملہ صحیحہ ناطقہ ج (لا) مین ارقام کی ایک صنف کی امثال کی یکسان علامت ہو اور اونکی آگی کے
ارقام کی صنف کی امثال کی علامت پہلی علامت کی متضاد ہو تو مساوات ج (لا) = ۰ کی ایک مثبت
قیمت ہوگی اور صرف ایک ہی مثبت قیمت ہوگی

بموجب دفعات ۲۰ اور ۲۱ کی مساوات ج (لا) = ۰ کی ایک مثبت قیمت ہوگی اب یہہ ثابت کرینگے
کہ صرف ایک ہی مثبت قیمت ہوگی

فرض کرو کہ $ج(لا) = ع_۰ لا^{ن} + ع_۱ لا^{ن-۱} + ع_۲ لا^{ن-۲} + \cdots + ع_{ن-۱} لا + ع_{ن}$

فرض کرو کہ امثال $ع_۰$ اور $ع_۱ \cdots ع_ر$ سب کے مثبت ہین اور باقی امثال منفی ہین

فرض کرو کہ $ع_{ر+۱} = -ع'_{ر+۱}$ اور $ع_{ر+۲} = -ع'_{ر+۲} \cdots ع_{ن} = -ع'_{ن}$

پس ج (لا) کو ہم اسطرح لکھہ سکتی ہین کہ

$$ج(لا) = لا^{ن-ر}\left[ع_۰ لا^{ر} + ع_۱ لا^{ر-۱} + ع_۲ لا^{ر-۲} + \cdots + ع_ر - \frac{ع'_{ر+۱}}{لا} - \frac{ع'_{ر+۲}}{لا^۲} - \cdots - \frac{ع'_{ن}}{لا^{ن-ر}}\right]$$

جملہ $ع_۰ لا^{ر} + ع_۱ لا^{ر-۱} + ع_۲ لا^{ر-۲} + \cdots ع_ر$ ایسا ہی بڑہتا ہے جیسا کہ لا بڑہتا ہے
مگر جس حالت مین کہ ر = ۰ کے تو اوس کی قیمت مستقل ہو جاتی ہے اور جملہ
$\frac{ع'_{ر+۱}}{لا} + \frac{ع'_{ر+۲}}{لا^۲} + \cdots + \frac{ع'_{ن}}{لا^{ن-ر}}$ ایسا گھٹتا ہے جیسا کہ لا بڑہتا ہے

بس جب لا صفر سی اوپر بڑہتا ہی تو دونو جملہ سوا ایک دفعہ کی آپسمین برابر نہین ہو سکتی اسکی یہی معنی ہین کہ

ج (لا) = ۰ کے صرف ایک ہی مثبت قیمت ہے

(۲۳) کسی طرح مشابہ نہ لگی اسلئی ہم آخر تین دفعات کے نتایج کو نہایت صفائی اور درستی کے ساتھہ لکھتے ہین۔

دفعہ ۲۰ مین جس مساوات کا ذکر ہی اوسکی واسطی یہہ ثابت ہوا ہی کہ اوسکی کم از کم ایک اصلی قیمت ہوتی ہے مگر یہہ نہین ثابت ہوا کہ وہ صرف ایک ہی ہوتی ہی دفعہ ۲۱ مین جس مساوات کا بیان ہوا ہی اوسکے واسطی یہہ ثابت ہوا ہی کہ اوسکی کم از کم دو اصلی قیمتین ہونگین مگر یہہ نہین ثابت کیا کہ صرف دو ہی اصلی قیمتین ہونگین

دفعہ ۲۲ مین جس مساوات کا ذکر ہی اوسمین ثابت ہوا ہی کہ ایک مثبت قیمت اوسکی ہوتی ہی اور یہہ بہی ثابت ہوا ہی کہ صرف ایک ہی قیمت ہوتی ہی مگر یہہ نہین ثابت ہوا کہ کوئی اوسکی منفی قیمت نہین ہوتی

(۲۴) دفعات ۲۰ و ۲۱ و ۲۲ مین جو مقدمات ثابت ہوئی ہین اونمین خاص صورتون کے اندر قیمتون کا وجود موقوف اس امر پر رکہا گیا ہی کہ ہم اس بات کو ثابت کرین کہ

ج (لا) کی ایک دفعہ علامت یا کئی دفعہ علامت بدلتی ہی اگر برخلاف اسکے ایسی صورت ہو کہ خاص سلک قیمتون کی ایسی ہو کہ ہم یہہ ثابت کردین کہ ج (لا) کی علامت موافق اوس سلک کے نہین تبدیل ہوئی تو کوئی قیمت مساوات ج (لا) = ہین اوس سلک مین سے لا کی واسطی نہ ہوگی

اب اس دعوی کی ظاہر صورتین ذیل مین لکہتی ہین

(۱) اگر امثال ج (لا) کی سب مثبت ہون تو مساوات ج (لا) = ۰ کی کوئی مثبت قیمت نہوگی

(۲) اگر ج (لا) مین لا کی زوج قوا کی امثال یکسان علامت رکہین اور لا کی طاق قوتون کی سب امثال پہلی علامت کی متضاد علامت رکہین تو مساوات ج (لا) = ۰ کی کوئی منفی قیمت نہ ہوگی

(۳) اگر لا کی صرف زوج قوا سی ج (لا) ملتف ہو اور تمام امثال کی یکسان علامت ہو تو مساوات ج (لا) = ۰ کی کوئی اصلی قیمت نہین ہوگی

(۴) اگر صرف لا کی طاق قوا سی ج (لا) ملتف ہو اور تمام امثال کی یکسان علامت ہو تو مساوات ج (لا) = ۰ کی کوئی اصلی قیمت نہین ہوگی الا اوس صورت مین کہ لا = ۰

ہم نی دو آخر صورتون مین یہہ لکہا ہی کہ مساوات کی اصلی قیمت کوئی نہین ہوگی اگرچہ ہم نے پہلی کہا کہ

کوئی قیمت اوسکی نہین ہوگی اسواسطی کہ اس بات کو ہم جبر مقابلہ کی چھبیسوین باب مین پڑہ چکی ہین کہ
باتفاق جمہور مساوات بعض صورتون مین ایسی ہوتی ہی کہ اوسکی قیمت تخیلی ہوتی ہے

باب دوم وجود قیمت کی بیان مین

(۲۵) ہم ثابت کرینگے کہ ہریک مساوات صحیح ناطقہ کی ایک قیمت ہوتی ہی خواہ وہ اصلی ہو خواہ خیالی

یعنی اس صورت ا + ب $\sqrt{-1}$ کی جسمین ا اور ب اصلی ہین ایسی جملہ ا + ب $\sqrt{-1}$
کو جسمین ا اور ب اصلی ہون جملہ خیالی کہتی ہین اسکی یہہ معنی ہین کہ جب ہم لفظ خیالی کا کسی جملہ کی نسبت استعمال مین
لائین تو اوسی مراد یہہ ہوتی ہی کہ وہ جملہ ا + ب $\sqrt{-1}$ کی صورت کا ہی اور اوسمین ا اور ب اصلی ہین

(۲۶) طالب علم اس بات کو جانتی ہین کہ بعض باتین باتفاق جمہور ایسی مقرر ہوتی ہین کہ جنکی سبب سے
ہم تحقیقات جبریہ مین خیالی جملون سے بحث کرسکتی ہین اور اونکی باب مین بعض مسائل قائم کرسکتی ہین
مثلاً ا^2 + ب^2 کی جذر کی مثبت قیمت قالب ہریک جملہ ا + ب $\sqrt{-1}$ اور ا - ب $\sqrt{-1}$ کا کہلاتا ہے
اور اس حدود کی استعانت سی یہہ ہم ثابت کرسکتی ہین کہ دو خیالی جملون کی حاصل ضرب کا قالب
ان دو جملون کی قالبون کا حاصل ضرب ہوتا ہی

اسواسطی کہ حاصل ضرب ا + ب $\sqrt{-1}$ اور اَ + بَ $\sqrt{-1}$ کا

ااَ - ب بَ + (ا بَ + اَ ب) $\sqrt{-1}$ اور قالب انکا مثبت قیمت جذر (ااَ - ب بَ)^2 + (ابَ + اَب)^2
کی یعنی (ا^2 + ب^2) (اَ^{2} + بَ^{2}) کی ہی اور اسکی یہی معنی ہین کہ دو معلوم جملون کے قالبون
کا حاصل ضرب یہہ قالب ہے

اور نیز جملہ ا + ب $\sqrt{-1}$ اوس حالت مین معدوم قرار دیا گیا ہی کہ ا اور ب معدوم
ہوجائین پس اب یہہ ثابت ہوا کہ اگر حاصل ضرب دو خیالی جملون کا معدوم ہوتا ہے تو ایک جملہ
کا قالب بہی معدوم ہوجاتا ہی اور ایسی ہی اگر حاصل ضرب دو یا زیادہ خیالی جملون کا معدوم ہوتا ہے
تو خود ایک جملہ بہی معدوم ہوتا ہی اور اگر ایک خود جملہ معدوم ہوجاتا ہے تو اوسکا حاصل ضرب بہی معدوم ہوجاتا ہے

(۲۷) جن طالب علمون نے خیالی جملون پر توجہ نہ کی ہو اب وہ پہلے جبر مقابلہ کی چھبیسوین باب کو دیکہین

اب ایک بات بہت مشکل ہم ثابت کرتی ہین کہ ہر ایک مساوات ایک قیمت رکہتی ہی خواہ وہ قیمت اصلی ہو
یا خیالی ہو + یہہ بہتر معلوم ہوتا ہی کہ بالفعل طالب علم اس امر کو یون ہی تسلیم کر لی اور آگی کام چلائی
اور اس باب کو آگی چہوڑ دی اور پہر جب کچہہ اس رسالہ کو پڑہ لی تو پہر اوسکو مطالعہ کری اول اس مسئلہ
کے سمجہنی مین دقت نہ اٹہائی

(۲۸) اول ہم یہہ ثابت کرتی ہین کہ چارون معادلات ذیل مین ایک ایک قیمت وجود رکہتی ہے
خواہ وہ قیمت اصلی ہو یا خیالی

$$لا^{ن} = ۱ \qquad لا^{ن} = -۱ \qquad لا^{ن} = +\sqrt{-۱} \qquad لا^{ن} = -\sqrt{-۱}$$

(۱) $لا^{ن} = ۱$ مین ظاہر ہے کہ $لا = ۱$ ایک قیمت مساوات کی ہے
(۲) $لا^{ن} = -۱$ اگر ن طاق عدد ہو تو ظاہر ہی کہ $لا = -۱$ کی ایک قیمت مساوات کی ہوگی
اگر ن زوج ہو تو اوسکو برابر ۲م کی فرض کرو تو یہہ ثابت کرنا ہوگا کہ مساوات $لا^{۲م} = -۱$
کا ایک حل ہی اور اسکی معنی یہی ہین کہ ہم یہہ ثابت کردین کہ مساوات $لا^{م} = \pm\sqrt{-۱}$
کا ایک حل ہی سلئی اسکا حل بہی باقی دو ذیل کی مساواتون کی حل مین داخل ہوگیا
(۳) $لا^{ن} = +\sqrt{-۱}$ اگر ن طاق ہو تو اوسکی دو صورتین ۴م + ۱ اور ۴م + ۳ کی ہونگین
اول صورت مین $+\sqrt{-۱}$ ایک قیمت ہی سلئی کہ $(+\sqrt{-۱})^{۴م+۱} = +\sqrt{-۱}$
اور دوسری صورت مین $-\sqrt{-۱}$ ایک قیمت ہوگی کیونکہ $(-\sqrt{-۱})^{۴م+۳} = +\sqrt{-۱}$
اگر ن ایک جفت عدد ہی تو فرض کرو کہ وہ م ع کی برابر ہی اسمین م ایک طاق عدد ہی اور ع کوئی سی قوت
۲ کی مثلاً $۲^{ق}$ ہی د = $لا^{ع}$ کی رکہو تو مساوات $لا^{م ع} = +\sqrt{-۱}$ کو اسطرح لکہ سکتے ہین کہ
$د^{م} = +\sqrt{-۱}$ اور ابہی ہم ثابت کرائی ہین کہ $+\sqrt{-۱}$ ایک مناسب قیمت د کی ہی
اگر م کی صورت ۴ر + ۱ ہو اور $-\sqrt{-۱}$ ایک مناسب قیمت د کی ہے
اگر م کی صورت ۴ر + ۳ کی ہو اب ہم کو لا کی قیمت ایسی دریافت کرنی باقی رہی کہ
جسی شرائط $لا^{ع} = +\sqrt{-۱}$ اور $لا^{ع} = -\sqrt{-۱}$ کی پوری ہون اسمین $ع = ۲^{ق}$

قیمت مطلوب اسکی جبر مقابلہ کی ایک معمولی عمل سی اسطرح حاصل ہو سکتی ہی کہ جذر $+\sqrt{-1}$
کا لو یا $-\sqrt{-1}$ کا نکالو اسی ایک جملہ سہ + صہ $\sqrt{-1}$ حاصل ہوگا جسمین سہ اور صہ اصلی ہونگے
اب جذر سہ + صہ $\sqrt{-1}$ کا لو تو اسی جذر اسکے متماثل ایک جملہ ہوگا اور علی ہذالقیاس
جبر مقابلہ کا پچیسوان باب دیکھو جب ہم ق دفعہ جذر نکالین تو ایک جملہ
ا + ب $\sqrt{-1}$ حاصل ہوگا اور $(ا + ب\sqrt{-1})^{ن} = +\sqrt{-1}$ یا $= -\sqrt{-1}$

(۴) $لا^{ن} = -\sqrt{-1}$ پر مثل (۳) کی عمل کرو اگر ن طاق عدد ہو اور ۴م + ۱ کی صورت کا ہو تو $-\sqrt{-1}$
قیمت ہوگی اور جب ۴م + ۳ کی صورت کا ہو تو $+\sqrt{-1}$ ایک قیمت ہوگی اور اگر ن جفت قوت ہو
تو اوسکو برابر م ع کی فرض کرو جسمین م طاق عدد ہی اور ع = $۲^{ق}$ اور اب عمل موافق سابق کی کرو

(۲۹) ہر یک مساوات صحیحہ ناطقہ کی ایک اصلی یا خیالی قیمت ہوتی ہے

فرض کرو کہ ج (لا) = $ع_{.} لا^{ن} + ع_{۱} لا^{ن-۱} + ع_{۲} لا^{ن-۲} + \cdots + ع_{ن-۲} لا^{۲} + ع_{ن-۱} لا + ع_{ن}$
اور مثال ع. ع۱ ع۲ ... $ع_{ن-۲}$ $ع_{ن-۱}$ $ع_{ن}$ کیا اصلی ہین یا خیالی ہین اب ہم کو یہہ ثابت کرنا ہی
کہ مساوات ج (لا) = ۰ کی ایک قیمت کیا اصلی یا خیالی ہوگی اگر بجای لا کی کوئی جملہ خیالی ج (لا) مین مندرج
کرین تو حاصل یو + مو $\sqrt{-1}$ کی صورت کا حاصل ہوگا اور اسمین یو اور مو اصلی مقادیر ہونگین اب ہم کو یہہ ثابت کرنا ہا
کہ ایک جملہ خیالی ایسا ہی کہ وہ یو = ۰ اور مو = ۰ کی کرتا ہی اور اس بات کو ہم اسطرح ثابت کرتے ہین کہ
چونکہ $یو^{۲} + مو^{۲}$ ہمیشہ ایک اصلی مثبت مقدار ہی اگر وہ صفر نہ ہوگی تو کوئی قیمت ایسی اوسکی ضرور ہونی چاہئے
کہ وہ کسی اور قیمت سی بڑی نہ ہو یعنی کوئی ایسی قیمت ہونی چاہی کہ وہ گہٹ نہ سکی لیکن اب ہم یہہ ثابت کرینگے کہ
$یو^{۲} + مو^{۲}$ کی کوئی قیمت سوا صفر کی ہو تو ہم اوس جملہ مین کہ لا کی واسطے رکہا جاے ایک مناسب تغیر پیدا کر کی اوس قیمت کو
گہٹا سکتی ہین اور اسسے یہہ نتیجہ نکالتی ہین کہ $یو^{۲} + مو^{۲}$ قابلیت صفر ہونی کی رکہتا ہی یعنی یو اور مو دونو ایک ہی وقت
معدوم ہو جاتے ہین

فرض کرو کہ لا کی ایک خاص قیمت یعنی ا + ب $\sqrt{-1}$ مقرر کی گئی ہی اور اوسکی مندرج کرنے سے
ج (لا) کا عر + قر $\sqrt{-1}$ کی صورت کا ہو جاتا ہی اسمین عر اور قر دونو صفر نہین ہین اب

ا + ب√-١ + ھ کو لاکی جگہ ج (لا) مین رکہو اب قیمت ج (لا) کی جو صورت پیدا ہوگی وہ اسطرح دریافت ہوگی
اول ج (لا + ھ) کو قوا ر ھ مین پہیلائین اور پہر ا + ب√-١ کو بجای لا کی رکہین پس فرض کرو

ج (لا + ھ) = لا + ھ لاَ + ھ² / ٢ لاً + . . . + ھن / ان ع. لن

اسمین لا اور لاَ اور لاً . . . جملہ لا کے ہین دفعہ ١٠ کو دیکہو
لا کی جگہ ا + ب√-١ رکہو تو لا کی صورت غر + قر√-١ کی ہو جائیگی
بعض امثال لا اور لاً . . . کی لا کی اس قیمت سی فنا ہو جائیگی مگر وہ سب کے سب معدوم
لا کی اس قیمت سی نہین ہو سکتی کیونکہ اخر امثال ھن / ان کا ع. لن ہے
فرض کرو کہ ھم سب سے ادنی درجہ کی قوت ھ کی ہی جسکی امثال فنا نہین ہوتی اور ھم کے
کے امثال کو مر + صر√-١ سی تعبیر کرو اسمین مر اور صر دونو صفر نہین ہین پس جب ا + ب√-١ + ھ
لا کی جگہ رکہا جای تو ج (لا) یہہ ہو جاتا ہے کہ

غر + قر√-١ + (مر + صر√-١) ھم + . . .

جن رقموں کو لکہا نہین اونمین ھ کی قوا ر بڑی ھم ملتف ہین اسکو غرَ + قرَ√-١ سے تعبیر کرو
فرض کرو کہ ھ = بد طر اسمین بد ایک اصلی مثبت مقدار ہی بموجب دفعہ ٢٨ کی یہہ ہمارے اختیار مین ہے کہ
طر کو ایسا مقرر کرین کہ طرم کیا + ١ ہو یا - ١ پس اسی یہہ ہم حاصل کر سکتے ہین کہ

غرَ + قرَ√-١ = غر + قر√-١ ± (مر + صر√-١) لام + . . .

پس غرَ = غر ± مر بدم + . . .

قرَ = قر ± صر بدم + . . .

غرَ² + قرَ² = غر² + قر² ± ٢ (غر مر + قر صر) بدم + . . .

جو رقمین کہ یہان لکہی نہین اونمین بدم سے بڑی قوا ر بد کے ملتف ہونگے
اب بموجب دفعہ ١٤ کی بد کو ہم ایسا چہوٹا مقرر کر سکتی ہین کہ غرَ² + قرَ² کے قیمت مین جو تمام
رقمین بد سے ملتف ہون اونکی وہی علامت ہو جو ± ٢ (غر مر + قر صر) بدم کی علامت ہی

بشرطیکہ عرمر + فرصر صفر نہ ہو

اب ہم اول یہہ فرض کرتی ہین کہ عرمر + فرصر صفر نہین ہی تو علامت عر٢ + فر٢ - عر٢ - فر٢

وہی علامت ہے جو علامت ± ۲ (عرمر + فرصر) بدم کی جسمین لا کافی چھوٹا مقرر کیا گیا ہے

اور ہم اس بات کو یقینی جان سکتی ہین کہ یہہ علامت منفی بموجب اس فرض کے ہو گی کہ

اگر عرمر + فرصر مثبت ہو تو طرا ہو -١ اور اگر عرمر + فرصر منفی ہو تو طرا ہو +١

پس اسیواسطی عر٢ + فر٢ کو چھوٹا عر٢ + فر٢ سے کرسکتی ہین

دوم یہہ فرض کرو کہ عرمر + فرصر صفر ہی تو بجای طرا = ±١ کے

فرض کرنی کی طرا = ± $\sqrt{-1}$ فرض کرو اور پہر موافق سابق کی عمل کرو تو یہہ حاصل ہو گا کہ

عر + فر $\sqrt{-1}$ = عر + فر $\sqrt{-1}$ ± (مر + صر $\sqrt{-1}$) بد $\sqrt{-1}$ + . . .

پس عر = عر ± صر بدا + . . .

فر = فر ± مر بدم + ...

اور عر٢ + فر٢ = عر٢ + فر٢ ± ۲ (فرمر - عرصر) بدا + . . .

اسمین ارقام جنمین بدا سے بد کے اعلی قوتین ملتف ہون نہین لکھی ہین

اب (عرمر + فرصر)٢ + (فرمر - عرصر)٢ = (عر٢ + فر٢) (مر٢ + صر٢)

اور یہہ برابر صفر کی نہین ہو سکتا اسواسطی کہ عر٢ + فر٢ بموجب فرض کے برابر صفر کی نہین ہے اور مر٢ + صر٢

ثابت ہو چکا ہی کہ سوا صفر کے ہی پس اس سبب سے کہ عرمر + فرصر صفر ہے

فرمر - عرصر صفر نہین ہی اسیواسطے علامت عر٢ + فر٢ - عر٢ - فر٢ کے علامت وہی ہو گی جو

علامت ± ۲ (فرمر - عرصر) بدا کی ہی جسمین بد کافی چھوٹا فرض کیا گیا ہی اور ہم اس

بات کو یقینی جان سکتی ہین کہ یہہ علامت منفی بموجب اس فرض کی ہو گی کہ اگر فرمر - عرمر مثبت ہو تو

طرا ہو - $\sqrt{-1}$ اور اگر فرمر - عرصر منفی ہو تو طرا - $\sqrt{-1}$ یا + $\sqrt{-1}$ ہو اسواسطے ہم

عر٢ + فر٢ کو چھوٹا عر٢ + فر٢ سے فرض کر سکتے ہین

بس ہم نے اسطرح یہہ ثابت کردیا کہ لو۲ + مو۲ کی قیمت جب مختلف صفر سے ہو تو ہم اوس قیمت کو اسطرح گھٹا سکتے ہیں کہ لا کی بجای جو جملہ رکھا جاے اوسمین ایک مناسب تغیر کردیں یعنی لو۲ + مو۲ قابل اسکے نہیں ہے کہ کوئی مثبت قیمت اوسکی ایسی ہو کہ وہ گھٹ نہ سکے جو کچھہ ہم نے بیان کیا اوسسے معلوم ہوتا ہے کہ یہہ ممکن ہے کہ لو = ۰ اور مو = ۰ کے ایک ہی وقت مین ہو سکتے ہیں

(۳۰) اب یہہ ثابت کرنا باقی رہا کہ ا اور ب جملہ ا + ب$\sqrt{-1}$ مین جو لا کی بجای مندرج کرنے سے ج (لا) کو معدوم کرتا ہی متناہی ہے

$$\text{ج (لا)} = \text{ع}_{.}\,\text{لا}^{\text{ن}} \left\{ 1 + \frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_{.}\,\text{لا}} + \frac{\text{ع}_2}{\text{ع}_{.}\,\text{لا}^2} + \cdots + \frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{.}\,\text{لا}^{\text{ن}}} \right\}$$

اب بجای لا کے ا + ب$\sqrt{-1}$ رکھو تو ج (لا) کی یہہ صورت ہو گی کہ

$$\text{ع}_{.}(\text{ا} + \text{ب}\sqrt{-1})^{\text{ن}} \left[1 + \frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_{.}(\text{ا}+\text{ب}\sqrt{-1})} + \frac{\text{ع}_2}{\text{ع}_{.}(\text{ا}+\text{ب}\sqrt{-1})^2} + \cdots + \frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{.}(\text{ا}+\text{ب}\sqrt{-1})^{\text{ن}}} \right]$$

اب جو سلسلہ خطوط وحدانی کی درمیان ہے اوسمین سے کسی رقم کو مثلا اوس رقم کو جسمین ع۲ ہے منقلب کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{\text{ع}_2}{\text{ع}_{.}(\text{ا}+\text{ب}\sqrt{-1})^2} = \frac{\text{ع}_2}{\text{ع}_{.}}\cdot\frac{(\text{ا}-\text{ب}\sqrt{-1})^2}{(\text{ا}^2+\text{ب}^2)^2} = \frac{\text{ع}_2(\text{ا}^2-\text{ب}^2)}{\text{ع}_{.}(\text{ا}^2+\text{ب}^2)^2} - \frac{2\text{ع}_2\,\text{ا}\,\text{ب}\sqrt{-1}}{\text{ع}_{.}(\text{ا}^2+\text{ب}^2)^2}$$

= ما + ب$\sqrt{-1}$ سے معبر کرو

اب یہہ ظاہر ہے کہ جب ا، ب غیر متناہی زیادہ ہوتی ہیں تو ا اور ب غیر متناہی کم ہوتے ہیں پس جب لا = ا + ب$\sqrt{-1}$ کے ہو تو ج (لا) کی قیمت کو لو + مو$\sqrt{-1}$ کے تعبیر کرنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{لو} + \text{مو}\sqrt{-1} = \text{ع}_{.}(\text{ا}+\text{ب}\sqrt{-1})^{\text{ن}} \left\{ 1 + \text{اَ} + \text{بَ}\sqrt{-1} \right\}$$

اسمین اَ اور بَ کی غیر متناہی زیادہ ہونے سے اَ اور بَ لانہایت کم ہوتی ہیں اور یہہ ہی ہم کو حاصل ہے کہ

$$\text{لو} - \text{مو}\sqrt{-1} = \text{ع}_{.}(\text{ا}-\text{ب}\sqrt{-1})^{\text{ن}} \left[1 + \text{اَ} - \text{بَ}\sqrt{-1} \right]$$

$$\text{بس لو}^2 + \text{مو}^2 = \text{ع}_{.}^2(\text{ا}^2+\text{ب}^2)^{\text{ن}} \left[(1+\text{اَ})^2 + \text{بَ}^2 \right]$$

اور یہہ لا انتہا زیادہ ہوتا جبکہ ا اور ب لا انتہا زیادہ ہوں کیونکہ ایک جز ضربی $(\text{ا}^2+\text{ب}^2)^{\text{ن}}$

غیر متناہی زیادہ ہوتا ہی اور ایک جزو ضربی (۱ + ز)^{۲} + ب^{۲} کی غایت الانتہا کی طرف پہونچتی ہے
پس لو^{۲} + مو^{۲} اوس حالت میں معدوم نہیں ہوسکتی کہ ا اور ب لاانتہا زیادہ ہوں یا ایک اونمیں سی غیر متناہی زیادہ ہو

(۳۱) اس بات پر بہی خیال کرنا چاہیی کہ دفعہ ۲۹ کی اثبات میں مساوات مفروضہ کی امثال اصلی اور خیالی دونو ہوسکتی ہیں مگر اگلی کتاب میں سب جگہ امثال سی امثال اصلی مراد ہیں بشرطیکہ اوسکی خلاف کہیں بیان کیا گیا ہو

(۳۲) مساوات کی ایک قیمت کی ہونی کا جو اثبات لکھا گیا ہی اوسکو کوچی صاحب کا اثبات کہتی ہیں اب اس مضمون پر بہی مباحثہ عظیم ہوا ہی اوسکی تمام کیفیت کیمبرج کی فلوزوفیکل سوسائیٹی کی دسوین جلد میں لکہی ہی اوسمین ایک بحث ڈی مورگن صاحب نی لکہی ہی اور دوسرے مسٹر ایری صاحب نی لکہی اور پہر ایری صاحب کی بحث کا ایک تکملہ بہی اوسمین موجود ہی ڈی مورگن صاحب نی لکہا ہی کہ جو اثبات کہ کوچی صاحب کا مشہور ہے وہ پہلی ارگیند صاحب نے لکہا ہے

تیسرا باب خواص معادلات

(۳۳) جتنی درجہ کی مساوات ہوتی ہی اوتنی ہی اوسمین قیمتیں ہوتی ہیں

فرض کرو کہ مساوات ن درجہ کی ہی اور ج (لا) = ۰ سے تعبیر ہوتی ہے اسمین

ج (لا) = ع. لا^{ن} + ع$_{۱}$ لا$^{ن-۱}$ + ع$_{۲}$ لا$^{ن-۲}$ + ... + ع$_{ن-۱}$ لا + ع$_{ن}$

بموجب باب دوم کی اس مساوات ج (لا) = ۰ کی ایک قیمت ضرور ہوگی خواہ وہ اصلی ہو یا خیالی اس قیمت کو ا$_{۱}$ سی تعبیر کرو تو بموجب دفعہ ۶ کی ج (لا) پورا لا - ا$_{۱}$ پر تقسیم ہوگا اور اسلئی

ج (لا) = (لا - ا$_{۱}$) مح$_{۱}$ (لا) اسمین مح$_{۱}$ (لا) کوئی جملہ جبریہ صحیحہ لا کا

(ن - ۱) درجہ کا ہی اب پہر بموجب باب دوم کی مح$_{۱}$ (لا) = ۰ کی ایک قیمت اصلی یا خیالی ہے اوسکو ا$_{۲}$ سی تعبیر کرو تو بموجب دفعہ ۶ کی مح$_{۱}$ (لا) پورا لا - ا$_{۲}$ پر تقسیم ہوگا اور اسیواسطے

مح$_{۱}$ (لا) = (لا - ا$_{۲}$) مح$_{۲}$ (لا) اسمین مح$_{۲}$ (لا) ایک جملہ صحیحہ جبریہ لا کا (ن - ۲) درجہ کا ہی

اسیواسطی ج (لا) = (لا - ا$_{۱}$) (لا - ا$_{۲}$) مح$_{۲}$ (لا) اور اسیطرح عمل کرنے سے

ج (لا) کی ن اجزاء ضربی لا - ا$_{۱}$ اور لا - ا$_{۲}$ اور ..... لا - ا$_{ن}$ حاصل ہونگے

اور ایک اور جز ضربی ع. ہوگا کیونکہ امثال لاⁿ کے ج (لا) مین ع. ہے پس

ج (لا) = ع. (لا - ا۱) (لا - ا۲) (لا - ا۳) . . . . (لا - ان)

اسی معلوم ہوا کہ مساوات ج (لا) = ۰ کی ن قیمتین ہین کیونکہ ن مقادیر
ا۱ و ا۲ . . . ان مین سی کوئی مقدار بجای لا کی ج (لا) مین رکہین تو وہ اوسکو معدوم
کر دیگی اور اس مساوات کی ن قیمتون سی زیادہ کوئی قیمت نہ ہوگی اسلیٔ کہ اگر لا کے کوئی اور قیمت
س جو ن قیمتون ا۱ اور ا۲ . . . ان مین سی نہ ہو مقرر کرین تو ج (لا) یہہ ہو جایگا

ع. (س - ا۱) (س - ا۲) (س - ا۳) . . . (س - ان)

اب یہہ صفر نہین ہو سکتا اسواسطے کہ ہر ایک جز ضربی اسکا مختلف صفر سی ہی اور حاصل ضرب اجزاء ضربی کا
خواہ اصلی ہو یا خیالی ہو معدوم نہین ہو سکتا جب تک کہ کوئی جز ضربی خود معدوم نہ ہوتا ہو دفعہ ۲۶ کو دیکہو

(۳۴) دفعہ گذشتہ مین تمام قیمتین کیا اصلی ہونگین یا اس صورت ا + ب $\sqrt{-1}$ کی ایسین ا اور ب اصلی
ہین اور بعض قیمتین ا۱ اور ا۲ . . . ان مین برابر بہی ہو سکتی ہین اسلیٔ کچہہ ضرور نہین کہ ن درجہ کی
مساوات کی ن مختلف قیمتین ہی ہون شاید طالب علم اس بات پر مناقشہ کری گا کہ ن درجہ کی مساوات
کی ن قیمتین کسطرح ہو سکتی ہین جب کہ اونکا اسمین مختلف ہونا ضرور نہ ہو تو ہم یہہ کہتی ہین کہ
اسمین بڑی آسانی ہی کہ ن درجہ کی مساوات کی ن ہی قیمتین کہی جائین گو اونمین بعض قیمتین
اسمین برابر ہون جیسا کہ جبر مقابلہ مین مساوات درجہ دوم ا لا۲ + ب لا + ح = ۰ مین بیان کیا گیا ہے
کہ جب ب۲ = ۴ ا ح تو اوسکی دو برابر قیمتین گننی مین بہ نسبت ایک قیمت گننی کی آسانی ہے

(۳۵) اب جو ہم نی امکان مساوی قیمتون کے داخل ہونی کا بیان کیا اوسکا اثر دفعات گذشتہ مین سے
صرف ایک دفعہ ۲۲ پر ہوتا ہی اوس دفعہ مین یہہ ثابت کیا ہی کہ مساوات خاص صورت کی دو مختلف
مثبت قیمتین نہین ہو سکتین لیکن اس بات کو اثبات مین نہین ثابت کیا ہی کہ جس قیمت کا ہونا ضرور ہے
اوسکی برابر ایک قیمت یا کئی قیمتون کا ہونا ممکن نہین جب ہم دس کارٹیز صاحب کا قاعدہ علامات ثابت
کرینگی اوسوقت یہہ بات ظاہر ہو جائیگی کہ مساوات جسپر بحث کی گئی ہی ایک قیمت رکہتی ہی اور وہ مکرر نہین ہی

(۳۶) اگر مساوات ج (لا) = ۰ کی ایک قیمت ا۱ ہم کو معلوم ہو تو ہم کو یہہ معلوم ہوتا ہی کہ
ج (لا) = (لا − ا۱) مح۱ لا اسمین مح۱ لا ایک جملہ لا کا ایک درجہ کم ج (لا) سے ہے
اور باقی قیمتین ج (لا) = ۰ کی دریافت ہو سکتی ہین اگر ہم مساوات مح۱ (لا) = ۰ کو
جو مساوات ایک درجہ کم بہ نسبت ج (لا) = ۰ کی ہی حل کرین اور علی ہذا القیاس اگر ہم کو دو قیمتین ا۱ اور ا۲
مساوات ج (لا) = ۰ معلوم ہون تو ہم کو معلوم ہی کہ ج (لا) = (لا − ا۱) (لا − ا۲) مح۲ (لا)
اسمین مح۲ (لا) ایک جملہ لا کا دو درجہ کم بہ نسبت ج (لا) کی ہی اور باقی قیمتین ج (لا) = ۰ کی
مساوات مح۲ (لا) = ۰ کی حل کرنی سی دریافت ہو سکتی ہین یہہ مساوات دو درجہ کم بہ نسبت
ج (لا) = ۰ کے ہے اور علی ہذا القیاس

(۳۷) اگر ج (لا) ایک جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ن درجہ کا ہو تو ہم نی یہہ ثابت کر دیا ہی
کہ ج (لا) اول درجہ کے ن اجزاء ضربی مین تحلیل ہونی کی ایسی قابلیت رکھتا ہے کہ

ج (لا) = ع. (لا − ا۱) (لا − ا۲) . . . (لا − ان)

اسمین ا۱ و ا۲ . . . ان کیا اصلی یا خیالی ہین اس بات پر غور کرنی چاہیی کہ ج (لا) جن اجزاء
ضربی مین تحلیل ہو سکتا ہی اوسکا نظم ایک ہی ہوتا ہی جبکہ مقادیر ا۱ اور ا۲ . . . ان
سب غیر مساوی ہون تو ایک نظم کا اجزاء ضربی مین ہونا ظاہر ہی مگر جب بعض مقادیر
ا۱ و ا۲ و ا۳ . . . ان مین مساوی ہون تو ج (لا) کی مختلف طور سی اسطرح ترکیب نہین پا سکتا
کہ ایک ہی اجزاء ضربی کے مختلف قوت نما ہون اگر یہہ ممکن ہو تو فرض کرو

ج (لا) = ع. (لا − ا۱)^{ر} (لا − ا۲)^{ص} (لا − ا۳)^{ط} . . . .

اور ج (لا) = ع. (لا − ا۱)$^{ر'}$ (لا − ا۲)$^{ص'}$ (لا − ا۳)$^{ط'}$ . . .

اب فرض کرو کہ ر بڑا ر′ سی ہی تو (لا − ا۱)$^{ر'}$ پر تقسیم کرنے سے یہہ حاصل ہوگا کہ

ع. (لا − ا۱)$^{ر - ر'}$ (لا − ا۲)^{ص} (لا − ا۳)^{ط} . . . = ع. (لا − ا۲)$^{ص'}$ (لا − ا۳)$^{ط'}$ . . .

اب دائین طرف کا رکن مساوات لا = ا۱ کی ہونی سی معدوم ہوتا ہی مگر بائین طرف کا رکن معدوم

نہیں ہوتا اسلئی ان جملوں میں تطبیق نہیں ہوسکتی اسی ثابت ہوا کہ ج (لا) کی اجزا ضربی کا نظم ایک ہی ہوتا ہے

(۳۸) اگر کوئی ن درجہ کا جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ن مختلف لا کی قیمتوں سی زیادہ قیمتوں سی معدوم ہوتا ہے تو جملہ میں ہر امثال صفر ہوگا اور جملہ بہی لا کی ہر قیمت کی موافق صفر ہوگا

اسواسطی کہ اگر جملہ لا میں کوئی امثال صفر نہ ہو تو لا کی مختلف قیمتوں سی جو تعداد میں ن سے زیادہ ہوں جملہ معدوم نہ ہوگا پس اگر ن سی زیادہ مختلف قیمتوں سے لا کی جملہ معدوم ہوتا ہے تو ہر یک امثال جملہ میں صفر ہونا چاہئے

(۳۹) دفعہ گذشتہ میں جو ثبوت لکہا ہے وہ مسئلہ کی اثبات کو موقوف اس بات پر کرتا ہی کہ مساوات ن درجہ کی ن قیمتیں ہوتی ہیں اور اخر کار یہہ مقدمہ باب دوم کی تحقیقات پر موقوف ہوجاتا ہے

لیکن اس مسئلہ کو ہم استقراء سی بہی ثابت کرسکتی ہیں اور پہر اوسکی واسطی ضرورت باب دوم کی تحقیقات کی نہیں ہے

فرض کرو کہ لا کا جملہ جو ن درجہ کا ہو وہ ن سی زیادہ قیمتوں کے موافق معدوم ہوتا ہو اور جملہ کے ہر امثال صفر ہی تو اب ہم یہہ ثابت کرنا چاہتی ہیں کہ لا کا جملہ (ن +۱) درجہ کا ن +۱ مختلف قیمتوں سے زیادہ قیمتوں سی معدوم ہوگا اور ہر یک امثال جملہ میں صفر ہوگا

فرض کرو کہ $ج(لا) = ق_0 لا^{ن+1} + ق_1 لا^{ن} + ق_2 لا^{ن-1} + \cdots + ق_ن لا + ق$

اور فرض کرو کہ (ن +۱) قیمتوں سی زیادہ قیمتیں لا کی ج (لا) کو فنا کرتی ہیں اور ا ایک قیمت ان قیمتوں میں ایسی ہی کہ $ج(ا) = 0$ کی ہوتا ہی تو $ج(لا) = ج(لا) - ج(ا)$

$$= ق_0 (لا^{ن+1} - ا^{ن+1}) + ق_1 (لا^{ن} - ا^{ن}) + ق_2 (لا^{ن-1} - ا^{ن-1}) + \cdots + ق_ن (لا - ا)$$

اسکو اس صورت سی لکہہ سکتی ہیں کہ

$$ج(لا) = (لا - ا)\, مج(لا)$$

اسمیں مج (لا) جملہ لا کا ن درجہ کا ہے

چونکہ لا کی ن مختلف قیمتوں سی زیادہ ایسی قیمتیں کہ ج (لا) کو معدوم کرتی ہیں اور ان قیمتوں سے ا خارج ہے تو لا کی ن مختلف قیمتوں سی زیادہ قیمتیں ایسی ہونگیں کہ مج (لا) کو فنا کرتی ہیں اور اسیواسطے بموجب فرض کے ہر یک امثال مج (لا) میں صفر ہی اب بموجب دفعہ ۷ کے

مج (لا) = ق. لاⁿ + (ق. ا + ق) لاⁿ⁻¹ + (ق. ا + ق ا + ق) لاⁿ⁻² ...

پس ق. = ۰ کیونکہ لاⁿ کا امثال صفر ہی پس ق ا = ۰ کیونکہ لاⁿ⁻¹ کا امثال صفر ہے

تو ق = ۰ کیونکہ لاⁿ⁻² کا امثال صفر ہی اور علی ہذا القیاس

پس ج (لا) مین ہر یک امثال صفر ہے

اسی دعوی ثابت ہی کیونکہ یہہ ہم کو معلوم ہی کہ وہ اول اور دوم درجہ کی جملون کے صورت مین ثابت ہے

(۴۰) اگر ج (لا) ن درجہ کا جملہ لا کا ہو تو ہم نی ثابت کر دیا ہی کہ ج (لا) اول درجہ کے ن اجزاء ضربی مین تحلیل ہو سکتا ہی ان اجزاء ضربی مین سی ہر یک ج (لا) کو پورا تقسیم کریگا

تو ج (لا) کی ن مقسوم علیہ پوری بانٹنی والی ہونگی اور حاصل ضرب ان اجزاء ضربی مین سی کسی دو اجزاء ضربی کا درجہ دوم کا جز ضربی ج (لا) کا ہوگا اور اسیواسطے

ج (لا) کی $\frac{ن(ن-۱)}{۱.۲}$ مقسوم علیہ پوری بانٹنی والی درجہ دوم کے ہونگی اور اسیطرح عمل کرنے سے ہم کو معلوم ہوگا کہ ج (لا) کی مقسوم علیہ پوری بانٹنی والی ر درجہ کی اوتنی ہونگی جتنی کہ اجتماع ن اشیا مین سی ر اشیا کی ہوتی ہین یعنی ج (لا) کی ر درجہ کے مقسوم علیہ پورا بانٹنی والی $\frac{ن(ن-۱)...(ن-ر+۱)}{لر}$ ہونگی

لیکن اس بات کو بہی یاد رکہنا چاہئی کہ مقسوم کسی درجہ کے مثلاً دوم درجہ کی یہہ ضرور نہین کہ مختلف ہی ہون کیونکہ یہہ کچہہ ضرور نہین ہے کہ اول درجہ کی اجزاء ضربی سب مختلف ہون غرض خلاصہ مطلب یہہ ہے کہ ر درجہ کی مختلف مقسوم علیہ $\frac{ن(ن-۱)...(ن-ر+۱)}{لر}$ سے زیادہ نہین ہو سکتی

(۴۱) مساوات جسمین امثال اصلی ہون اوسکے قیمتون مین خیالی قیمتون کے ازواج ہوتے ہین یعنی جوڑی ہوتی ہین

فرض کرو کہ ج (لا) ایک جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ہی جسمین امثال لا کی سب اصلی ہین پس اگر سہ + صہ $\sqrt{-1}$ ایک قیمت مساوات ج (لا) = ۰ کی ہو تو ضرور ہی کہ سہ − صہ $\sqrt{-1}$ بہی ایک قیمت ہوگی

اسواسطی کہ جب سہ + صہ $\sqrt{-1}$ کو لا کی جگہ جملہ (لا) مین رکہین تو اوسکی صورت ع + ق صہ $\sqrt{-1}$ کی ہوگی جسمین ع اور ق مین صہ کی جفت قوتین ملتی ہین

یہہ بات ظاہر ہی کیونکہ اگر لا کے جملہ کو پہیلائین اور اوسمین لا = سہ + صہ $\sqrt{-1}$ تو

صہ √-۱ کی جفت قوتین اصلی رقمین پیدا کرینگے اور √-۱ صہ کا تعلق طاق قوا کے ساتہہ ہوگا اور چونکہ ج (لا) کی امثال سب اصلی مانی گئی ہین √-۱ کا
کسی طرح سواء صہ کے طاق قوا کے نہین واقع ہوسکتا
پس اگر سہ - صہ √-۱ بجای لا کی ج (لا) مین رکہا جای تو وہ ماحصل حاصل ہوگا جو لا کی جگہ سہ + صہ √-۱ کی رکہنی حاصل ہوا تہا مگر اوسمین صہ کی علامت بدلی ہوئی ہوگی
اسیواسطی ماحصل ع - ق صہ √-۱ ہوگا پس اگر سہ + صہ √-۱ ایک قیمت ج (لا) = ۰
کی ہو تو چاہی کہ ع = ۰ اور ق = ۰ کے ہو اسلئی مساوات
ع - ق صہ √-۱ برابر صفر کے ہوگا اسواسطی سہ + صہ √-۱ بہی ایک قیمت مساوات
ج (لا) = ۰ کے ہوگی
(۴۲) اگر ج (لا) ایک جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ہو اور اوسمین سب امثال اصلی ہون اور ایک جز ضربی اوسکا
لا - ا، ہو اور اسمین ا، = سہ + صہ √-۱ کے ہو تو اوسکا دوسرا جز ضربی
لا - ا۲ ہوگا جسمین ا۲ = سہ - صہ √-۱ ہوگا اور حاصل ضرب ان دو اجزاء ضربی
لا - سہ - صہ √-۱ اور لا - سہ + صہ √-۱ کا (لا - سہ)^2 + صہ^2 یعنی
لا^2 - ۲ سہ لا + سہ^2 + صہ^2 ہی یعنی حاصل ضرب ایک اصلی درجہ دوم کا جز ضربی ہے
(۴۳) پس ہم کو یہہ نتیجہ حاصل ہوا کہ ہر جملہ صحیحہ ناطقہ لا کو جسمین سب اصلی مثال ہون یون خیال کرسکتی ہین کہ وہ حاصل ضرب اصلی اجزاء ضربی کا ہی خواہ وہ اول درجہ کی ہون یا درجہ دوم کی ج (لا)
اس صورت کا ہوگا کہ (لا - ا) (لا - ب) (لا - س) . . . (لا - ک) مج (لا) اسمین
ا اور ب اور س . . ک سب اصلی قیمتین ج (لا) = ۰ کی ہین اور مج (لا) وہ جملہ ہے جسمین
حاصل ضرب درجہ دوم کی اجزاء ضربی کا ہی اور اوسکی علامت نہین بدل سکتی
(۴۴) دفعہ ۴۱ کی طرح یہہ دعوی بہی ثابت ہوسکتا ہی کہ اگر ج (لا) جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ہو اور امثال بہی اوسکی ناطقہ ہون اور مساوات ج (لا) = ۰ کی قیمت ا + √ب کے صورت کے ہو تو

جسمین $\sqrt{ب}$ ایک مقدار اصم ہی تو اوس مساوات کی $ا - \sqrt{ب}$ بہی ضرور ہو گی
پس ج (لا) کا ایک جز ضربی درجہ دوم کا $(لا - ا)^{۲} - ب$ ہوگا

(۴۵) جملہ ج (لا) اور مساوات ج (لا) = ۰ کی امثال مین جو ارتباط باہمی ہو اوسکو دریافت کرو

فرض کرو کہ $ج(لا) = لا^{ن} + ع_{۱} لا^{ن-۱} + ع_{۲} لا^{ن-۲} + \cdots + ع_{ن-۱} لا + ع_{ن}$

اور فرض کرو کہ مساوات ج (لا) = ۰ کی قیمتین $ا_{۱}$ اور $ا_{۲}$ . . . $ا_{ن}$ ہین تو

$$ج(لا) = (لا - ا_{۱})(لا - ا_{۲}) \cdots (لا - ا_{ن})$$

چونکہ دونو صور مفصلہ بیانیہ ج (لا) کی مساوات متطابقہ ہین اسلئے امثال $ع_{۱}$ و $ع_{۲}$ . . . $ع_{ن}$
اور مقادیر $ا_{۱}$ و $ا_{۲}$ وغیرہ ان مین باہمی ارتباط ہی اب اس ارتباط کے توضیح ذیل مین کرتی ہین کہ
معمولی ضرب کے قاعدہ سی ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$(لا - ا_{۱})(لا - ا_{۲}) = لا^{۲} - (ا_{۱} + ا_{۲})لا + ا_{۱}ا_{۲}$$

$$(لا - ا_{۱})(لا - ا_{۲})(لا - ا_{۳}) = لا^{۳} - (ا_{۱} + ا_{۲} + ا_{۳})لا^{۲}$$
$$+ (ا_{۱}ا_{۲} + ا_{۲}ا_{۳} + ا_{۳}ا_{۱})لا - ا_{۱}ا_{۲}ا_{۳}$$

$$(لا - ا_{۱})(لا - ا_{۲})(لا - ا_{۳})(لا - ا_{۴}) = لا^{۴} - (ا_{۱} + ا_{۲} + ا_{۳} + ا_{۴})لا^{۳}$$
$$+ (ا_{۱}ا_{۲} + ا_{۱}ا_{۳} + ا_{۱}ا_{۴} + ا_{۲}ا_{۳} + ا_{۲}ا_{۴} + ا_{۳}ا_{۴})لا^{۲}$$
$$- (ا_{۱}ا_{۲}ا_{۳} + ا_{۱}ا_{۲}ا_{۴} + ا_{۱}ا_{۳}ا_{۴} + ا_{۲}ا_{۳}ا_{۴})لا + ا_{۱}ا_{۲}ا_{۳}ا_{۴}$$

اب ان ماحصل مین ہم یہہ قوانین دیکہتی ہین کہ
اول بائین طرف مین تعداد ارقام بہ نسبت تعداد اجزاء ضربی کی جو باہم ضرب دئی گئی ہین بقدر ایک کے زیادہ ہے
دوم قوت نما لا کا اول رقم مین تعداد اجزاء ضربی کی برابر ہے اور اگے ہر رقم مین قوت نما بقدر ایک کے اپنی ماقبل کی رقم کے قوت نما سی کم ہوتا جاتا ہے
سوم امثال اول رقم کا واحد ہی اور دوسرے رقم کا امثال مجموعہ اجزاء ضربی درجہ اول کے دوسرے رقمون کا ہی اور تیسری رقم کا امثال اجزاء ضربی درجہ اول کی دو دوسری رقمون مین

سی دو دو رقموں کی حاصل ضربوں کا مجموعہ ہی اور جو تھی رقم کا اشارہ اجزاء ضربی درجہ اول کے دوسری رقموں میں سی تین تین رقموں کے حاصل ضربوں کا مجموعہ ہی و علی ہذا القیاس اور آخر رقم اجزاء ضربی درجہ اول کی دوسری کل رقموں کا حاصل ضرب ہے

اب ہم یہہ ثابت کرینگے کہ تعداد اجزاء ضربی درجہ اول کی خواہ کچھہ ہی ہو سب صورتوں میں یہہ قوانین مصرحہ ہیں

فرض کرو کہ ن-۱ اجزاء ضربی جب آپسمین ضرب دی جائیں تو یہہ قوانین اونمیں پائی جاتی ہیں یعنی یہہ فرض کرو کہ

$$(لا - ا_1)(لا - ا_2)\dots(لا - ا_{ن-1}) = لا^{ن-1} + ق_1 لا^{ن-2} + ق_2 لا^{ن-3} + \dots + ق_{ن-2} لا + ق_{ن-1}$$

اسمین $ق_1 =$ مجموعہ ارقام $-ا_1$ و $-ا_2$ و $-ا_{ن-1}$

$ق_2 =$ ان ارقام مین سی دو دو کی حاصل ضربوں کے مجموعہ کے

$ق_3 =$ ان ارقام مین سی تین تین کی حاصل ضربوں کے مجموعہ کے

$ق_{ن-1} =$ کل ان ارقام کے حاصل ضرب کے

اس مطابقہ کے طرفین کو $لا - ا_ن$ مین ضرب دو

$$(لا-ا_1)(لا-ا_2)\dots(لا-ا_ن) = لا^ن + (ق_1 - ا_ن) لا^{ن-1} + (ق_2 - ق_1 ا_ن) لا^{ن-2}$$
$$+ (ق_3 - ق_2 ا_ن) لا^{ن-3} + \dots - ق_{ن-1} ا_ن$$

اب $ق_1 - ا_ن = -ا_1 - ا_2 - \dots - ا_{ن-1} - ا_ن$

$=$ مجموعہ کل ارقام $-ا_1$ و $-ا_2$ ... $-ا_ن$ کے

$ق_2 - ق_1 ا_ن = ق_2 + ا_ن (ا_1 + ا_2 + \dots + ا_ن)$

$=$ کل ارقام $-ا_1$ و $-ا_2$ .. $ا_ن$ مین سے دو دو کے حاصل ضربوں کے مجموعہ کے

$ق_3 - ق_2 ا_ن = ق_3 - ا_ن (ا_1 ا_2 + ا_1 ا_3 + \dots)$

$=$ کل ارقام $-ا_1$ و $-ا_2$ .. $ا_ن$ مین سی تین تین کے حاصل ضربوں کے مجموعہ کے

-ق ن-۱ ان = حاصل ضرب کل ارقام -ا۱ و -ا۲ ... -ان کے

پس اسی ثابت ہوا کہ اگر قوانین مذکور ن-۱ اجزا ضربی کی ضرب دینی مین پائی جاتی ہین تو وہ ن اجزا ضربی کی ضرب دینی مین بہی پائی جاتی ہین مگر یہہ ثابت کرائی ہین کہ قوانین مذکور چار اجزا ضربی کی ضرب دینی مین پائی جاتی ہین اسواسطی وہ پانچ اجزا ضربی کی ضرب دینی ہی پائی جائینگے اور علی ہذا القیاس پس وہ بالعموم سب صورتون مین موجود ہونگے

اگر ا۱ و ا۲ ... ان قیمتین مساوات

لا^ن + ع۱ لا^ن-۱ + ع۲ لا^ن-۲ + ... + ع ن-۱ لا + ع ن = ۰ کے ہون

تو دائین طرف کا رکن مساوات برابر ہوگا حاصل ضرب اجزا ضربی (لا-ا۱) اور (لا-ا۲) ... (لا-ان) کے اور اسی یہہ نتایج حاصل ہونگی اگر مساوات سادہ صورت مین ہو تو اوسمین دوسری رقم کا امثال تمام قیمتون کی مجموعہ کی برابر ہوتا ہی مگر علامت بدلی ہوئی ہوتی ہی اور تیسری رقم کا امثال برابر ہوتا ہی دو دو قیمتون کی حاصل ضربون کی مجموعہ کی مگر قیمتون کی علامت بدلی ہوئی ہوتی ہین اور چوتہی رقم کا امثال برابر ہوتا ہی تین تین قیمتون کی حاصل ضربون کے مجموعہ کی مگر اونکی علامتین بدلی ہوئی ... آخر رقم برابر ہوتی ہی تمام قیمتون کی حاصل ضرب کے مگر اونکی علامتین بدلی ہوئی

یا ہم ان قوانین کو اسطرح بیان کرتی ہین کہ امثال دوسری رقم کا جسکی علامت بدلی ہوئی ہی برابر تمام قیمتون کی مجموعہ کی اور امثال تیسری رقم کا برابر ہی دو دو قیمتون کے حاصل ضربون کی مجموعہ کی اور امثال چوتہی رقم کا جسکی علامت بدلی ہوئی ہو برابر ہوتا ہے تین تین قیمتون کے حاصل ضربون کی مجموعہ کی پس بالعموم اگر ع ر معمول کی موافق امثال لا^ن-ر کا مساوات مین ہو تو

(-۱)^ر ع ر = ر قیمتون کے حاصل ضربون کے مجموعہ کے

(۴۶) شاید کسی کی دل مین یہہ خیال پیدا ہو کہ جو ارتباط اوپر بیان ہوئی ہین اونسے مساوات مفروضہ کی قیمتین ہم کو معلوم ہو جائین کیونکہ اونسی مساواتین ایسی حاصل ہوتی ہین جنمین قیمتین ملتف ہوتی ہین اور تعداد ان مساواتون کی بہی اوتنی ہی ہوتی ہے جتنی کہ قیمتین ہین تو ان مساواتون مین سی سب قیمتون کو دور کرکے

ایک قیمت رہنی دین اور اوس ایک قیمت کو دریافت کرلین لیکن جب ہم اور قیمتون کو مساواتون سی دور کرتی ہین تو مساوات مفروضہ ہی خود ہم کو دوبارہ حاصل ہوجاتی ہے اسواسطے کچھہ فایدہ نہین ہوتا مثلاً مساوات

لا^3 + ع$_1$ لا^2 + ع$_2$ لا + ع$_3$ = ۰ کے ہو

اور اوسکے قیمتین ا و ب و ج فرض کرو تو

- ا - ب - ج = ع$_1$

اب + بج + ج ا = ع$_2$

- ا ب ج = ع$_3$

اب ب اور ج کی دور کرکی ایک مساوات ایسی حاصل کرتے ہین کہ جسمین فقط ا ہی ہو تو اوسکی سب سے زیادہ آسان ترکیب یہہ ہے کہ ان تین مساواتون مین اول مساوات کو ا^2 مین ضرب دو اور دوسرے مساوات کو ا مین اور تیسرے مساوات کی ساتھہ ماحصل کو جمع کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

- ا^3 - ا^{2}ب - ا^{2}ج + ا^{2}ب + ابج + ج ا^2 - ابج = ع$_1$ ا^2 + ع$_2$ ا + ع$_3$

یعنی ا^3 + ع$_1$ ا^2 + ع$_2$ ا + ع$_3$ = ۰

اب یہان مساوات جو حاصل ہوئی وہی ہی جو مساوات مفروضہ تہی فقط فرق اتنا ہی کہ لا کی جگہ ا ہی اور یہہ بات سمجھنی کچھہ مشکل نہین ہی کہ ارتباطات مذکور سی جب ہمنے ب اور ج کو دور کیا تو ایک مساوات تیسری درجہ ا کی حاصل ہوگئی ہم کو اسی مساوات کے حاصل ہونے کی توقع تہی کیونکہ حروف ا اور ب اور ج قیمتون کو تعبیر کرتی ہین اور اونمین باہم کچھہ تمیز نہین ہے اسلئی جو مساوات ا کی استخراج کرینگے اوسمین ا کی تین قیمتین ہونگین کیونکہ ا مساوات کی تینون قیمتون مین سی ہر یک قیمت ہوسکتا ہی پس اسی ہم کو خوب یقین ہوگیا کہ امثال مساوات اور اوسکی معلوم قیمتون مین جو ارتباطات باہمی ہونگی اون پر جو اعمال جبریہ اس نظر سی کیے جائینگی کہ اور قیمتین سوا ایک کے دور ہوجائینگی اونسی مساوات مفروضہ پیدا ہوگی

(۴۷) دفعه ۴۵ مین جو ارتباطات بیان هوئی کو اونسی قیمتین مساوات کی نهین دریافت هو سکتین مگر اور بڑی بڑی نتایج اونسی مساوات کے باب مین مستنبط هوتے هین

مثلاً ا۱ و ا۲ ... ان قیمتین مساوات

$$\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ع}_1 \text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ع}_2 \text{لا}^{\text{ن}-2} \cdots + \text{ع}_{\text{ن}-1} \text{لا} + \text{ع}_{\text{ن}} = 0$$ کی هون

$$\text{تو} \quad -\text{ع}_1 = \text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3 + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}}$$

$$\text{ع}_2 = \text{ا}_1\text{ا}_2 + \text{ا}_1\text{ا}_3 + \cdots + \text{ا}_2\text{ا}_3 + \cdots$$

$$\text{ع}_1^2 - 2\text{ع}_2 = \text{ا}_1^2 + \text{ا}_2^2 + \text{ا}_3^2 + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}}^2$$

یعنی $\text{ع}_1^2 - 2\text{ع}_2$ برابر هی مساوات مفروضه کی قیمتون کی مجذورون کے مجموعه کی پس اگر مساوات $\text{ع}_1^2 - 2\text{ع}_2$ منفی هو تو تمام قیمتین مساوات کی اصلی نهین هونگین

(۴۸) موافق دفعه سابق کی اور ارتباطات هی جنمین قیمتین ملتف هون مستنبط کر سکتی هین

مثلاً $(-1)^{\text{ن}-1} \text{ع}_{\text{ن}-1} =$ ن - ا قیمتون کے حاصل ضرب کے مجموعه کے

$(-1)^{\text{ن}} \text{ع}_{\text{ن}} =$ تمام قیمتون کے حاصل ضرب

اسیواسطے تقسیم کرنے سے

$$-\frac{\text{ع}_{\text{ن}-1}}{\text{ع}_{\text{ن}}} = \frac{1}{\text{ا}_1} + \frac{1}{\text{ا}_2} + \cdots + \frac{1}{\text{ا}_{\text{ن}}}$$

= مجموعه قیمتون متکافیه یا مقلوبه کے

اورنیز $$\text{ع}_1 \frac{\text{ع}_{\text{ن}-1}}{\text{ع}_{\text{ن}}} = (\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}})\left(\frac{1}{\text{ا}_1} + \frac{1}{\text{ا}_2} + \cdots \frac{1}{\text{ا}_{\text{ن}}}\right)$$

$$= \text{ن} + \frac{\text{ا}_1}{\text{ا}_2} + \frac{\text{ا}_1}{\text{ا}_3} + \cdots + \frac{\text{ا}_2}{\text{ا}_1} + \frac{\text{ا}_2}{\text{ا}_3} + \cdots$$

اسیواسطے $$\frac{\text{ا}_1}{\text{ا}_2} + \frac{\text{ا}_1}{\text{ا}_3} + \cdots + \frac{\text{ا}_2}{\text{ا}_1} + \frac{\text{ا}_2}{\text{ا}_3} + \cdots = \frac{\text{ع}_1 \text{ع}_{\text{ن}-1}}{\text{ع}_{\text{ن}}} - \text{ن}$$

باب چهارم تبدل هئیت معادلات

(۴۹) عموماً مضمون اور مطلب اس باب کا یهه هی که مساوات معلوم سی ایک اور ایسی مساوات مستنبط کرین که جسکی قیمتین مساوات معلوم کی قیمتون سی ایک ارتباط خاص رکهتی هون

جب اگی دیکھینگے تو یہہ معلوم ہوگا کہ بہت سی تبدل ہیئت مساوات معلوم کی بغیر اوسکی قیمتون کے معلوم ہونی کی ہوسکتی ہین اور مثالون سی معلوم ہوگا کہ یہہ تبدل ہئیت مساواتون کی حل کرنی مین کام اتی ہین

(۵۰) ایک مساوات کی ہئیت بدل کر دوسری مساوات ایسی بنادو کہ اوسکی قیمتون کے علامت بدل جاوے

فرض کرو کہ ج (لا) = ۰ مساوات ہی اور ی = - لا کے ایسا مقرر کرو کہ

جب لا کی کوئی خاص قیمت ہو تو ی کی وہی قیمت تعداداً ہو مگر علامت اوسکی متضاد ہو

پس لا = - ی اور مساوات مطلوب ج (- ی) = ۰ کے ہے

اگر ج (لا) = $ع_{0} لا^{ن} + ع_{1} لا^{ن-1} + ع_{2} لا^{ن-2} + \cdots + ع_{ن-1} لا + ع_{ن}$

مساوات ج (- ی) = ۰

$$ع_{0}(-ی)^{ن} + ع_{1}(-ی)^{ن-1} + ع_{2}(-ی)^{ن-2} + \cdots - ع_{ن-1} ی + ع_{ن} = 0$$

یعنی $ع_{0} ی^{ن} - ع_{1} ی^{ن-1} + ع_{2} ی^{ن-2} + \cdots \pm ع_{ن-1} ی \mp ع_{ن} = 0$

پس اسی معلوم ہوا کہ مساوات معلومہ کے ہئیت کو اگر اسطرح بدلین کہ دوسری رقم سی شروع کرکے ہر یک رقم کی علامت کو بدل دین تو مساوات مطلوب حاصل ہو جائیگی

(۵۱) دفعہ گذشتہ کی اخر مین جو قاعدہ بیان ہوا ہی اوسمین مساوات مفروضہ کی اندر تمام رقمین وہ فرض کی گئین ہین جو اوس درجہ کی مساوات مین واقع ہوا کرتی ہین یعنی کسی مثال کو صفر نہین فرض کیا اب اگر کوئی ایسی مثال ہو کہ جسمین یہہ بات نہ پائی جائی مثلاً یہہ مساوات ہو کہ

$$لا^{6} + 3 لا^{5} - 4 لا^{3} - 4 لا + 7 = 0$$

اسکو ایسی مساوات مین تبدیل کرنا ہو کہ جسکی قیمتین باعتبار کمیت کی تو وہی ہون جو اس مساوات کی قیمتین ہین مگر علامتین انکے متضاد ہون

لا = - ی رکہو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$ی^{6} - 3 ی^{5} + 4 ی^{3} + 4 ی + 7 = 0$$

اگر ہم چاہین تو اصل مساوات کو اسطرح لکہین کہ

$$لا^{6} + 3 لا^{5} + 0 \times لا^{4} - 4 لا^{3} + 0 \times لا^{2} - 4 لا + 7 = 0$$

تو بموجب قاعدہ دفعہ ۵۰ کے مساوات کے ہئیت بدل کر یہہ مساوات حاصل ہوگی کہ

$$\text{ی}^{6} - 3\text{ی}^{5} + 0\times\text{ی}^{4} + 4\text{ی}^{3} + 0\times\text{ی}^{2} + 4\text{ی} + 7 = 0$$

یعنی $$\text{ی}^{6} - 3\text{ی}^{5} + 4\text{ی}^{3} + 4\text{ی} + 7 = 0$$

اور یہی مساوات سابق مین حاصل ہوئی تہی

مساوات مین جب وہ سب قیمین واقع ہون جو اوس درجہ کی مساوات مین واقع ہوتی ہین یعنی کوئی مثال صفر نہو تو ہم اوسکو مساوات کامل کہتی ہین اور کبہی کبہی اسی ہی کام بہت نکلتا ہی کہ مساوات کو کامل موافق حکمت مذکورہ کی بنالین یعنی جو رقمین نہون اونکو لکہہ لین اور مثال اونمین سے ہر یک کی صفر بنائین

(۵۲) ایک مساوات کی ہئیت بدل کر دوسری مساوات ایسی بناؤ کہ جسکی قیمتین مساوات مفروض کے قیمتون سے کچہہ خاص گنی ہو یعنی خاص اضعاف ہون یا اجزا

فرض کرو کہ ج (لا) = ۰ مساوات مفروضہ ہی اور مطلوب یہہ ہی کہ اس مساوات کی ہئیت بدل کر دوسرے مساوات ایسی بنائین کہ جسکی قیمتین ک گنی مساوات مفروضہ کی قیمتون سی ہو

ی = ک لا کے مقرر کرو جب لا کی کوئی خاص قیمت ہو تو ی کی قیمت ک گنی ہوگی

پس $\text{لا} = \frac{\text{ی}}{\text{ک}}$ اور مساوات مطلوب $\text{ج}\left(\frac{\text{ی}}{\text{ک}}\right)$ ہے

(۵۳) مثلاً اس مساوات

$$\text{لا}^{3} - \frac{3\,\text{لا}^{2}}{2} + \frac{5\,\text{لا}}{4} - \frac{2}{9} = 0$$ کی

ہئیت بدل کر دوسرے مساوات بناؤ جسکی قیمتین ک گنی ہون $\text{لا} = \frac{\text{ی}}{\text{ک}}$ کے رکہو

اور پہر ک^{3} مین سب کو ضرب دو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{ی}^{3} - \frac{3\,\text{ک}\,\text{ی}^{2}}{2} + \frac{5\,\text{ک}^{2}\,\text{ی}}{4} - \frac{2\,\text{ک}^{3}}{9} = 0$$

اس مثال سی ہم بتلائینگے کہ اس تبدل ہئیت کو کن کام مین لاسکتی ہین مساوات مفروضہ مین سب امثال صحیح نہین ہین تو ہم ک کی مناسب قیمت فرض کرکے مساوات کی ایسی ہئیت بدل کر دوسری مساوات پیدا کرسکتی ہین کہ جسمین سب امثال صحیح اعداد ہون

مثلاً ک = ۴ کے فرض کرو تو مساوات بدل کر

$د^3 - 4 د^2 + 45 د - 48 = 0$ ہو جائینگے

عموماً یہہ فرض کرو کہ مساوات

$لا^ن + ع_1 لا^{ن-1} + ع_2 لا^{ن-2} + \cdots + ع_{ن-1} لا + ع_ن = 0$ ہو

اب اگر ہم لا = ی/ک کی فرض کرین اور سب کو کن مین ضرب دین تو جو مساوات اسطرح پیدا ہو گی اوسمین تمام امثال کی صحیح اعداد ہونی کی واسطی فقط اس بات کا تحقیق کرنا ضرور ہی کہ ہر ایک رقم ع ر کر ہ ن-ر کی واسطی ہر ایک جزو ضربی اعلیٰ بنائین جو ع ر کی نسبتا مین واقع ہو کم از کم اوسکی اعلیٰ قوت کر مین واقع ہو

(۵۴) ایک مساوات کی ہیئت بدل کر دوسری مساوات ایسی پیدا کرو کہ اوسکی قیمتین مساوات مفروض کے قیمتون سی بقدر ایک مقدار مستقل کی جدا گانہ کم ہون

فرض کرو کہ ج (لا) = ۰ مساوات مفروضہ ہو اور یہہ مطلوب ہی کہ اس مساوات کی ہیئت بدل کر دوسری مساوات ایسی پیدا کرین کہ اوسکی قیمتین مساوات مفروضہ کی قیمتون سی بقدر مقدار مستقل ک کے کم ہون د = لا - ک کی ایسا مقرر کرو کہ جب لا کی کوئی خاص قیمت لین تو قیمت د کی اوسی بقدر ک کی کم ہو لا = ک + د اور مساوات مطلوب ج (ک + د) = ۰ ہے

بموجب دفعہ ۱۰ کے مساوات (ک + د) = ۰ کو پھیلاؤ تو

$$ج(ک) + د\,ج'(ک) + \frac{د^2}{2 \times 1} ج''(ک) + \frac{د^3}{\underline{|3}} ج'''(ک) + \cdots + د^ن \frac{ج^ن(ک)}{\underline{|ن}} = 0$$

پس اگر ج (لا) = $ع_0 لا^ن + ع_1 لا^{ن-1} + ع_2 لا^{ن-2} + \cdots + ع_{ن-1} لا + ع_ن$

مساوات ج (ک + د) = ۰ کو موافق قواء متنازلہ د کی بموجب دفعہ ۱۲ کی مرتب کرین تو

$$ع_0 د^ن + (ع_1 + ن ع_0 ک) د^{ن-1} + \left[ع_2 + (ن-1) ع_1 ک + \frac{ن(ن-1)}{2 \times 1} ع_0 ک^2\right] د^{ن-2}$$
$$+ \left[ع_ر + (ن-ر+1) ع_{ر-1} ک + \cdots + \frac{ن(ن-1)\cdots(ن-ر+1)}{\underline{|ر}} ع_0 ک^ر\right] د^{ن-ر}$$
$$+ \cdots + ج(ک) = 0$$

(۵۵) اگر ایک مساوات کی ہیئت بدل کر دوسری مساوات ایسی پیدا کرنی ہو کہ جسکی قیمتین مساوات

مفروضہ کی قیمتون سی بقدر ایک مقدار مستقل ھہ کی زیادہ ہون تو ہم کو ترکیب سابق پر عمل کرنا چاہی
فرض کرو کہ مساوات ج (لا) = ۰ سی تعبیر ہو اور ی = لا + ھہ کے فرض کرو تو
لا = ی - ھہ اور مساوات مطلوب ج (ی - ھہ) = ۰ اب دفعہ گذشتہ کی نتیجہ مین - ھہ
بجای ک کی رکھو تو مساوات مطلوب حاصل ہو جائیگی اگر غور سی خیال کرو تو یہہ بات دفعہ گذشتہ
کی بیان مین ضمناً ثابت ہوگی اسلئی کہ اس دفعہ مین یہہ کچہہ ضرور نہین کہ ک قطعی مثبت مقدار رہے ہو

(۵۶) دفعہ ۵۴ مین جس تبدل ہئیت کو ہم نی حاصل کیا ہی اوسکا بڑا فایدہ یہہ ہی کہ ایک مساوات
مفروضہ مین سی جس رقم کو ہم تعین کرین معدوم ہو جاسے
مثلاً اگر بدلی ہوئی مساوات مین دوسری رقم کو معدوم کرنا چاہین تو ہم ک کو ایسا مقرر کرتی ہین
کہ ع۱ + ن ع۰ ک = ۰
یعنی ک = - $\frac{\text{ع}_1}{\text{ن ع}_0}$ ہو اور اگر ہم یہہ چاہین کہ بدلی ہوئی مساوات ی مین تیسری
رقم نہ رہی تو ہم ک کو اس دوسری درجہ کی مساوات سے دریافت کرین کہ

$$\text{ع}_2 + (\text{ن} - ۱)\,\text{ع}_1\,\text{ک} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۱ \times ۲}\,\text{ع}_0\,\text{ک}^2 = ۰$$

اب بالعموم یہہ ہی کہ بدلی ہوئی مساوات ی مین (ر + ۱) وین رقم نہ رہی
تو ہم ک کو اس ر درجہ کی مساوات سے دریافت کرین کہ

$$\text{ع}_0\,\text{ک}^{\text{ر}} + \frac{\text{ر}}{\text{ن}}\,\text{ع}_1\,\text{ک}^{\text{ر}-۱} + \frac{\text{ر}(\text{ر}-۱)}{\text{ن}(\text{ن}-۱)}\,\text{ع}_2\,\text{ک}^{\text{ر}-۲} + \dots + \frac{\lfloor\text{ر}\ \lfloor\text{ن}-\text{ر}}{\lfloor\text{ن}}\,\text{ع}_{\text{ر}} = ۰$$

اب ہم آگی بیان کرینگے کہ مساواتون کی حل کرنی مین بڑی آسانی کسی خاص رقم کی اڑا دینی سی ہو جاتی ہی

(۵۷) مثلاً مساوات لا۳ - ۶ لا۲ + ۴ لا + ۵ = ۰ کی ہئیت بدل کر ایسی مساوات پیدا کرو کہ
اوسمین دوسری رقم نہ ہو یہان ع۰ = ۱ اور ع۱ = -۶ پس ک = ۲ اور مساوات مطلوب

$$(\text{ی} + ۲)^3 - ۶(\text{ی} + ۲)^2 + ۴(\text{ی} + ۲) + ۵ = ۰$$

یعنی　$\text{ی}^3 - ۸\,\text{ی} - ۳ = ۰$

اب پہر اس مساوات لا۳ - ۲ لا۲ - ۴ لا + ۹ = ۰ کی ہئیت بدل کر ایک اور مساوات ایسی پیدا کرو

کہ اوسمیں تیسرے رقم نہ ہو، ی+ک کو بجای لا کے رکھو تو ہیئت بدلی ہوئی مساوات یہہ ہوگی

$$(ی+ک)^{۳} - ۲(ی+ک)^{۲} - ۴(ی+ک) + ۹ = ۰$$

یعنی $ی^{۳} + ی^{۲}(۳ک - ۲) + ی(۳ک^{۲} - ۴ک - ۴) + ک^{۳} - ۲ک^{۲} - ۴ک + ۹ = ۰$

یعنی اگر تیسرے رقم اڑانی منظور ہو تو مساوات $۳ک^{۲} - ۴ک - ۴ = ۰$ سی ک کو دریافت کرو
تو $ک = ۲$ یا $-\frac{۲}{۳}$ کی حاصل ہوگا $ک = ۲$ کی قیمت کی موافق بدلی ہوئی مساوات یہہ ہوگی کہ

$$ی^{۳} + ۴ی^{۲} + ۱ = ۰$$

اور موافق قیمت $ک = -\frac{۲}{۳}$ کے ہیئت بدلی ہوئی مساوات

$$ی^{۳} - ۴ی^{۲} + \frac{۲۸۳}{۲۷} = ۰$$

(۵۸) ایک مساوات کی ہیئت بدل کر ایک اور مساوات ایسی پیدا کرو کہ جسکی قیمتیں متکافی مساوات مفروضہ کے قیمتوں کے جداگانہ ہوں

فرض کرو کہ $ج(لا) = ۰$ مساوات مفروضہ ہو $ی = \frac{۱}{لا}$ کی ایا مقرر کرو کہ جب لا کی کوئی خاص قیمت معین ہو تو قیمت ی کی متکافی اوس قیمت کی ہو پس $لا = \frac{۱}{ی}$ اور مساوات مطلوب $ج(\frac{۱}{ی}) = ۰$ ہی

پس اگر $ج(لا) = ع_{۰}لا^{ن} + ع_{۱}لا^{ن-۱} + ع_{۲}لا^{ن-۲} + \cdots + ع_{ن-۱}لا + ع_{ن}$

تو مساوات $ج(\frac{۱}{ی}) = ۰$ یہہ ہوگی کہ

$$\frac{ع_{۰}}{ی^{ن}} + \frac{ع_{۱}}{ی^{ن-۱}} + \frac{ع_{۲}}{ی^{ن-۲}} + \cdots + \frac{ع_{ن-۱}}{ی} + ع_{ن} = ۰$$

یعنی $ع_{ن}ی^{ن} + ع_{ن-۱}ی^{ن-۱} + ع_{ن-۲}ی^{ن-۲} + \cdots + ع_{۱}ی + ع_{۰} = ۰$

(۵۹) ایک مساوات کی ہیئت بدل کر ایک اور مساوات ایسی پیدا کرو کہ جسکی قیمتیں مجذور مساوات مفروضہ کی ہر ایک قیمتوں کے جداگانہ ہوں

فرض کرو کہ $ج(لا) = ۰$ مساوات کو تعبیر کری اور $ی = لا^{۲}$ کی ایا مقرر کرو کہ جب لا کی کوئی خاص قیمت مقرر کیجائی تو ی کی قیمت اوسکا مجذور ہو پس $لا = \sqrt{ی}$ اور مساوات مطلوب $ج(\sqrt{ی}) = ۰$ ہے

پس اگر $ج(لا) = ع_{۰}لا^{ن} + ع_{۱}لا^{ن-۱} + ع_{۲}لا^{ن-۲} + \cdots + ع_{ن-۱}لا + ع_{ن}$

تو مساوات ج (ط ی) = ۰ یہہ ہوگی کہ

$$\text{ع}_{0}\,\text{ی}^{\frac{\text{ن}}{2}} + \text{ع}_{1}\,\text{ی}^{\frac{\text{ن}-1}{2}} + \text{ع}_{2}\,\text{ی}^{\frac{\text{ن}-2}{2}} + \cdots + \text{ع}_{\text{ن}-1}\,\text{ی}^{\frac{1}{2}} + \text{ع}_{\text{ن}} = 0$$

انتقال اور مجذور سے ہم کو یہہ حاصل ہوگا

$$\left(\text{ع}_{0}\,\text{ی}^{\frac{\text{ن}}{2}} + \text{ع}_{2}\,\text{ی}^{\frac{\text{ن}-2}{2}} + \text{ع}_{4}\,\text{ی}^{\frac{\text{ن}-4}{2}} + \cdots\right)^2 = \left(\text{ع}_{1}\,\text{ی}^{\frac{\text{ن}-1}{2}} + \text{ع}_{3}\,\text{ی}^{\frac{\text{ن}-3}{2}} + \cdots\right)^2$$

جب طرفین مساوات کو تشریحاً لکھینگے تو وہ صور منطق پیدا کرینگے اور جب سب رقموں کو ایک طرف لے ائینگے تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{ع}_{0}^{2}\,\text{ی}^{\text{ن}} + (2\text{ع}_{0}\text{ع}_{2} - \text{ع}_{1}^{2})\,\text{ی}^{\text{ن}-1} + (2\text{ع}_{0}\text{ع}_{4} + \text{ع}_{2}^{2} - 2\text{ع}_{1}\text{ع}_{3})\,\text{ی}^{\text{ن}-2} + \cdots = 0$$

(۶۰) مساوات کی تبدل ہیئت کی اور بہت سی صورتین ہوسکتی ہین مگر ہم نی اوسیقدر لکھی ہین جسقدر کہ اس مطلب کے سمجھنی کی لئی کافی تھین دفعہ ۴۵ مین جو ارتباط کا بیان ہوا ہی اونکی توضیح کے واسطی دو مثالین لکھکر اس بات کو ختم کرتے ہین

(۱) مساوات $\text{لا}^3 + \text{ق}\,\text{لا} + \text{ر} = 0$ کی ہیئت بدل کر ایسی مساوات پیدا کرو کہ جسکی قیمتین مجذور مساوات مفروضہ کے قیمتون کے تفاوت کا ہو

فرض کرو کہ ا اور ب اور ح قیمتین مساوات کی ہون تو بموجب دفعہ ۴۵ کے

$$\text{ا} + \text{ب} + \text{ح} = 0 \quad \text{اب} + \text{بح} + \text{حا} = \text{ق} \quad \text{ابج} = -\text{ر}$$

اسیواسطے $\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ح}^2 = -2\text{ق}$

اور ہیئت بدلی ہوئی مساوات کی قیمتین $(\text{ا}-\text{ب})^2$ اور $(\text{ب}-\text{ح})^2$ اور $(\text{ا}-\text{ح})^2$ ہین

اب $(\text{ا}-\text{ب})^2 = \text{ا}^2 - 2\text{اب} + \text{ب}^2 = \text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ج}^2 - 2\text{اب} - \text{ح}^2 =$

$$\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ح}^2 - \frac{2\text{ابج}}{\text{ح}} - \text{ج}^2$$

$$= -2\text{ق} + \frac{2\text{ر}}{\text{ح}} - \text{ح}^2$$

پس اگر $\text{ی} = -2\text{ق} + \frac{2\text{ر}}{\text{لا}} - \text{لا}^2$ اوس حالت مین کہ لا کی قیمت ح ہو تو قیمت ی کی $(\text{ا}-\text{ب})^2$ ہوگی اور علی ہذا القیاس جب لا کی قیمتین ا اور ب ہون

تو قیمتیں ء کی $(\text{ب}-\text{ح})^{2}$ اور $(\text{ح}-\text{ا})^{2}$ ہوگی پس ہیئت بدلی ہوئی مساوات
مساوات مفروضہ اور مساوات $\text{ء} = -2\text{ق} + \frac{3\text{ر}}{\text{لا}} - \text{لا}^{2}$ مین سے لا کی دور کرنی سی حاصل ہوگی
اور یہہ لا دور اسطرح ہوگا کہ

$$\text{لا}^{3} + \text{ق}\,\text{لا} + \text{ر} = 0$$

$$\text{اور}\ \text{لا}^{3} + (2\text{ق} + \text{ء})\,\text{لا} - 2\text{ر} = 0$$

$$\text{اسیواسطے}\ (\text{ق} + \text{ء})\,\text{لا} - 3\text{ر} = 0$$

پس $\text{لا} = \frac{3\text{ر}}{\text{ق}+\text{ء}}$ مساوات مفروضہ مین اس قیمت کو مندرج کرو تو آخر کار یہہ مساوات حاصل ہوگی

$$\text{ء}^{3} + 6\text{ق}\,\text{ء}^{2} + 9\text{ق}^{2}\,\text{ء} + 27\text{ر}^{2} + 4\text{ق}^{3} = 0$$

اسی معلوم ہوتا ہی کہ اگر $27\text{ر}^{2} + 4\text{ق}^{3}$ مثبت ہو تو بموجب دفعہ ۲۰ کے ہیئت بدلی ہوئی
مساوات کی قیمت ایک اصلی منفی ہوگی اور اسیواسطے مساوات مفروضہ کی دو خیالی قیمتیں
ہونگین کیونکہ یہی ایک زوج قیمتون کا ہوگا تو
ہیئت بدلی ہوئی مساوات کی ایک منفی قیمت پیدا کرے
اگر $27\text{ر}^{2} + 4\text{ق}^{3}$ صفر ہو تو ہیئت بدلی ہوئی مساوات کی ایک قیمت صفر ہوگی اور اسیواسطے
مساوات مفروضہ کی دو برابر قیمتین ہونگین

(۲) مساوات $\text{لا}^{3} + \text{ع}\,\text{لا}^{2} + \text{ق}\,\text{لا} + \text{ر} = 0$ کی ہیئت بدل کر ایسی مساوات پیدا کرو کہ
جسکی قیمتین مخذور مساوات مفروضہ کی قیمتون کی تفاوت کا ہو

$\text{لا} = \text{لا}' - \frac{\text{ع}}{3}$ رکھو تو مساوات مفروضہ ہو جائیگی کہ

$$\left(\text{لا}' - \frac{\text{ع}}{3}\right)^{3} + \text{ع}\left(\text{لا}' - \frac{\text{ع}}{3}\right)^{2} + \text{ق}\left(\text{لا}' - \frac{\text{ع}}{3}\right) + \text{ر} = 0$$

یعنی $\text{لا}'^{3} + \text{ق}'\,\text{لا}' + \text{ر}' = 0$

اسمین $\text{ق}' = \text{ق} - \frac{\text{ع}^{2}}{3}$ $\quad \text{ر}' = \frac{2\text{ع}^{3}}{27} - \frac{\text{ع}\,\text{ق}}{3} + \text{ر}$

آخر مساوات کی ہر یک قیمت مساوات مفروضہ کی ہر یک قیمت سے موافق نظیر کی بقدر $\frac{\text{ع}}{3}$ کی زیادہ

اسواسطی اخر مساوات کی قیمتوں کے مجذوردن کا تفاوت وہی ہوگا جو مساوات مفروضہ کی قیمتون کی مجذوردن کا تفاوت ہی اور موافق مثال گذشتہ کی مساوات مطلوب یہہ ہی کہ

$$ی^۳ + ۶ق ی^۲ + ۹ق^۲ ی + ۲۷ر^۲ + ۴ق^۳ = ۰$$

یعنی $ی^۳ + ۲(۳ق - ع^۲) ی^۲ + (۳ق - ع^۲)^۲ ی + \frac{(۲ع^۳ - ۹ع ق + ۲۷ر)^۲ + ۴(۳ق - ع^۲)^۳}{۲۷} = ۰$

باب پنجم ڈس کارٹیس کا قاعدہ علامات کا

(۶۱) دفعات ۲۱ - ۴۲ مین ہم نی مثالین ایسی بیان کین ہین کہ جنسے ج (لا) کے امثال کی تعلقات باہمی اور مساوات ج (لا) = ۰ کی قیمتون کی صفت ذاتی معلوم ہوتی ہی اب ہم اول چند حدود بیان کرینگی اور بعد ازان مسائل عامہ کی تحقیقات لکھینگے

(۶۲) اگر ایک سلسلہ رقام کی ہو اور ہر ایک رقم کی اول علامات + اور - سے کوئی ایک ہو تو مقادیر کے بالترتیب خیال کرنے مین جب ایک رقم کی وہی علامت ہو جو اوسکی رقم ماقبل کی علامت ہی تو اوسکو تواتر کہینگے اور جب ایک رقم کی علامت اپنی رقم ماقبل کی علامت سی مخالف ہو تو اوسکو تغیر کہینگے مثلاً جملہ $لا^۵ - ۳لا^۷ - ۴لا^۶ + ۷لا^۵ + ۳لا^۴ + ۲لا^۳ - لا^۲ - لا + ۱$ مین چار تواتر اور چار تغیر ہین اول تواتر - ۴ $لا^۶$ پر دوسرا تواتر + ۳ $لا^۴$ پر اور تیسرا تواتر + ۲ $لا^۳$ پر ہے اور چوتھا - لا پر اور اول تغیر - ۳ $لا^۷$ اور دوسرا + ۷ $لا^۵$ پر اور تیسرا - $لا^۲$ پر اور چوتھا + ۱ پر واقع ہوتا ہے

یہہ ظاہر ہی کہ جب مساوات کامل ہو تو اوسکی مجموعہ تواتر اور تغیر کی تعدادون کا اوس عدد کی برابر ہوگا جو مساوات کا درجہ تبلا رہا ہی دفعہ ۱۵ دیکھو

اور اگر ہم کسی مساوات کامل مین - لا بجای لا کی رکھہ دین تو نئی مساوات مین اصلی مساوات کی تغیر تواتر ہوجائینگے اور تواتر تغیر ہوجائینگے مساوات ج (لا) = ۰ مین جو کامل نہ ہو ج (لا) اور ج (- لا) کی تغیرات کی تعدادون کا مجموعہ ایسا عدد نہین ہوگا کہ مساوات کی درجہ سے بڑہ جاے وجہ اسکی یہہ ہی کہ جب ج (لا) مین بعض ارقام معدوم ہون تو یہہ ممکن ہے کہ ج (لا) اور ج (- لا) کے تغیرات کی تعداد کم ہوجاے مگر اوسکا زیادہ ہونا ناممکن ہے

اب ہم ایک مسئلہ کا بیان کرتی ہین اور اوسکو ثابت بھی کرتی ہین اوسکو ڈس کارٹیس کا قاعدہ علامات کہتی ہین

(۴۳) کسی مساوات مین خواہ وہ کامل ہو یا ناکامل تعداد مثبت قیمتون کی امثال کی تغیرات علامات کی تعداد سی زیادہ نہین ہوسکتی اور کسی مساوات کامل مین تعداد منفی قیمتون کی امثال کی تواتر علامات کی تعداد سی زیادہ نہین ہوسکتی

اول ہم ثابت کرینگے کہ کسی کثیر الارقام جملہ کو ہم جز ضربی لا - ا مین ضرب دین تو کم از کم حاصل ضرب مین ایک تغیر علامت بہ نسبت اصلی جملہ کے زیادہ ہوجائیگا

مثلاً فرض کرو کہ ایک اصلی جملہ کثیر الارقام کی علامات + + - - - + - + - - + ہین اور اس کثیر الارقام کو جملہ ثنائی مین ضرب دیتا ہے اور اوسکی علامتین + - ہین اب اگر ان علامتون کو لکھکر عمل ضرب کا کرین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

+ + - - - + - + - - +

+ -

+ + - - - + - + - - +

- - + + + - + - + + -

+ ± - + ± ± - + - + - -

دوہری علامت وہان لکھی ہے جہان کہ حاصل ضرب مین علامت کی اندر اشتباہ تہا

اب یہان یہہ قوانین نظر آتے ہین

(۱) اصلی کثیر الارقام میں ایک تواتر کی مقابل مین جدید کثیر الارقام مین ایک علامت مشتبہ کی واقع ہے، اور دونون مین تعداد علامات کی یکسان ہے،

(۲) جدید کثیر الارقام مین علامت مشتبہ کی ما قبل اور مابعد کی علامات مین تضاد ہے

(۳) کثیر الارقام جدید مین اخر مین ایک تغیر زیادہ ہوگیا ہے

اب کثیر الارقام جدید مین ایک صورت ایسی لو کہ وہ سب سے زیادہ مخالف معلوم ہوتی ہو اور تمام علامات مشتبہ کی جگہ تواترات کو رکہو تو بموجب قانون دوم کی تواتر کی تعداد مین کچھہ فرق اسی نہین پڑیگا کہ علامات مشتبہ کی ہم اوپر کی علامت لین تو اصلی کثیر الارقام کی علامتین کثیر الارقام جدید مین کرر

اینگی مگر جب تیسری قانون کی ایک تغیر علامات کا کثیر الارقام جدید کا اخر مین زیادہ داخل ہوجائیگا
پس جب ایسی صورت مخالف مین ایک تغیر علامت کا کثیر الارقام جدید مین بہ نسبت اصلی کثیر الارقام
زیادہ ہو گیا تو اور صورتون مین کیون نہ ہوگا

اب اگر ہم یہہ فرض کرین کہ ایک مساوات کی منفی اور خیالی قیمتون کے موافق اجزاء ضربی کی حاصل ضرب کو
ایک مثبت قیمت کی مطابق جزء ضربی مین ضرب دین تو کم از کم ایک تغیر علامت کا اوسمین داخل ہوجائیگا
اسیواسطے کسی مساوات مین تغیرات علامت کی تعداد سی زیادہ مثبت قیمتون کی تعداد نہین ہوسکتی
اب ڈس کارٹیس کے قاعدہ علامات کا دوسرا جزو ثابت کرتی ہین فرض کرو کہ مساوات کامل ہے
تو بجای لا کی – لا رکہنی سی ہئیت مساوات کی ایسی بدل جائیگی کہ اصل تواتر علامات تغیر علامات اوسمین
بنجائینگی اور اب اس بدلی ہوئی مساوات کی مثبت قیمتین بہ نسبت تغیرات کی زیادہ نہین ہوسکتین
اور اسکی یہہ معنی ہین کہ اصلی مساوات کی منفی قیمتون کی تعداد اوسکی تواتر علامت کی تعداد سی زیادہ نہین ہوسکتی

(٦٤) خواہ مساوات ج (لا) = ٠ کامل ہو یا نہ ہو اوسکی قیمتین بلحاظ کمیت کے برابر مساوات
ج (– لا) = ٠ کے قیمتون کی ہوتی ہین مگر علامت مین مخالف یعنی منفی قیمتین
ج (لا) = ٠ کی مثبت قیمتین ج (– لا) = ٠ کی ہوتی ہین خواہ مساوات کامل ہو یا نہ ہو
ج (– لا) = ٠ کی مثبت قیمتون کی تعداد ج (– لا) کے تغیرات علامت کی تعداد
سی زیادہ نہین ہوسکتی پس کل قاعدہ علامات کا اسطرح مختصر بیان ہوسکتا ہے کہ
ایک مساوات ج (لا) = ٠ کی مثبت قیمتین تعداد مین ج (لا) کے تغیرات علامت
کی تعداد سی زیادہ نہین ہوسکتی اور اوسکی منفی قیمتون کی تعداد ج (– لا) کی تغیرات علامت
کی تعداد سی زیادہ نہین ہوسکتی

(٦٥) مثلاً مساوات لا^٤ + ٣ لا^٢ + ٥ لا – ٧ = ٠ ہو یہان ایک تغیر علامت ہے اسواسطے ایک مثبت قیمت
سی زیادہ مثبت قیمتین نہین ہوسکتین اور لا کی جگہ – لا لکہو تو یہہ مساوات
لا^٤ + ٣ لا^٢ – ٥ لا – ٧ = ٠ کی حاصل ہوئی اسمین ایک تغیر علامت کا ہی اسلئی اوسکی ایک

ایک مثبت قیمت سی زیادہ کوئی اور مثبت قیمت نہین ہو سکتی اسواسطے اصلی مساوات کی کوئی
منفی قیمت ایک سی زیادہ نہین ہو سکتی پس اصلی مساوات کی دو حقیقی قیمتون سی زیادہ قیمتین نہین ہو سکتین
اس مثال مین بموجب دفعہ ۱۲ کی ہم کو یہہ معلوم ہوتا ہی کہ ایک مثبت قیمت ہی اور ایک منفی قیمت ہے
اور یہی ہم نی ایسی تحقیق کر کی لکھا ہی کہ ایک سی زیادہ ہر یک قیمت نہین ہو سکتی

اب پھر مساوات $لا^{۳}$ + ق لا + ر = ۰ پر خیال کرو اور اوسمین ق اور ر دونو مثبت ہین
اب یہان کوئی تغیر علامت نہین ہی اسواسطی اوسکی کوئی مثبت قیمت نہین ہی اور یہہ بات دفعہ ۲۴
کی موافق بہی ظاہر ہی اور اگر ہم لا کی جگہہ - لا لکھین تو مساوات مین ایک تغیر علامت کا ہوگا
تو اصلی مساوات کی ایک منفی قیمت سی زیادہ کوئی منفی قیمت نہین ہو سکتی اسلئے اصلی مساوات کی
دو خیالی قیمتین ہین

اب پھر مساوات $لا^{۳}$ - ق لا + ر = ۰ پر خیال کرو اور اسمین ق اور ر دونو مثبت ہین
اب یہان دو تغیر علامت کی ہین اسلئی اوسکی دو مثبت قیمتون سی زیادہ قیمتین نہین ہو سکتین
اور اگر لا کی جگہ - لا لکھین تو مساوات ایسی حاصل ہوگی کہ اوسمین ایک تغیر علامت ہوگا پس اصلی
مساوات کی ایک منفی قیمت سی زیادہ کوئی منفی قیمت نہین ہو سکتی
اس مثال مین بموجب دفعہ ۲۰ کی ہم اس بات کو جانتی ہین کہ ایک منفی قیمت اوسکی ہے اور یہہ
اب ہم نی تحقیق کر کی لکھا ہی کہ ایک سی زیادہ منفی قیمت نہین ہو سکتی اور باقی دو قیمتین تحقیقی
مثبت مقادیر ہین یا خیالی مقادیر ہین اسکو ہم ڈس کارٹس کے قاعدہ علامات سی نہین دریافت کر سکتی
لیکن بموجب دفعہ ۰۶ کی یہہ نتیجہ پیدا ہوتا ہی کہ مساوات جسکی قیمتین مساوات مفروضہ کے
قیمتون کی مجذورون کی تفاوت کی برابر ہون یہہ ہی کہ $ز^{۳}$ - ۶ق + ۹$ق^{۲}$ ز + ۲۷$ر^{۲}$ - ۴$ق^{۳}$ = ۰
اور ڈس کارٹس کے قاعدہ علامات اور دفعہ ۲۴ کی موافق اگر ۲۷$ر^{۲}$ - ۴$ق^{۳}$ منفی ہے
تو آخر مساوات کی کوئی قیمت منفی نہین ہوگی اور اسیواسطے اصلی مساوات کی کوئی قیمت خیالی نہین ہوگی
اور اگر ۲۷$ر^{۲}$ - ۴$ق^{۳}$ مثبت ہی تو آخر مساوات کی بموجب دفعہ ۲۰ کے کوئی منفی قیمت نہین ہونی کی

اسواسطی اصلی مساوات کی دو خیالی قیمتین ہونگین

(۶۶) طالب علم کو اس بات پر غور کرنی چاہیئی کہ دفعہ ۲۴ مین جو نتایج لکھی ہین وہ بالکل ڈس کارٹس کی قاعدہ علامات کی مطابق ہین اور او سب کی سب مستنبط ہوسکتی ہین اور دفعہ ۲۲ مین جو دعوی ثابت کیا ہے وہ بہی قاعدہ ڈس کارٹیس مین داخل ہی اور ہم کو اس قاعدہ سی یہہ بات بہی معلوم ہوتی ہے کہ دفعہ ۲۲ مین جس مساوات پر بحث ہوئی ہی اوسکی ایک مثبت قیمت سی زیادہ مثبت قیمتین ہوسکتی ہین خواہ برابر ہون خواہ نا برابر

(۶۷) ڈس کارٹس کے قاعدہ علامات مین یہہ ثابت ہوا ہی کہ کثیر الارقام کو ایک جز ضربی مین جو موافق ایک تحقیقی مثبت قیمت کی ہو ضرب دینی سی کم از کم ایک تغیر علامت داخل ہوسکتا ہے اب یہہ بیان کیا جاتا ہی کہ تغیرات علامات کی جو داخل کی جاتی ہین تعداد مین طاق ہوتی ہین اسواسطے کہ اول فرض کرو کہ اصلی کثیر الارقام مین اخر علامت + ہی تو کل تعداد تغیرات علامت کی اصلی کثیر الارقام مین جفت یا صفر ہونی چاہیئی اور کثیر الارقام جدید مین اخر علامت - ہی تو تعداد تغیرات علامت کی طاق ہونی چاہیی اسی معلوم ہوتا ہی کہ تغیرات علامت جو داخل کی گئی ہین وہ طاق ہین جفت کا طاق جب ہے بنتا ہی کہ طاق زیادہ ہو

دوم فرض کرو کہ اخر علامت اصلی کثیر الارقام مین - ہی تو کثیر الارقام جدید مین اخر علامت + ہوگی تو اصلی کثیر الارقام مین تعداد تغیرات علامت کی طاق ہوگی اور کثیر الارقام جدید مین تعداد تغیرات علامت کی جفت ہوگی اسواسطے تغیرات جو داخل کی گئی ہین اونکی تعداد طاق ہوگی

(۶۸) اگر سب قیمتین مساوات ج (لا) =۰ کی تحقیقی ہون تو تعداد مثبت قیمتون کی برابر ج (لا) کی تغیرات علامت کی تعداد کی ہی اور تعداد منفی قیمتون کی برابر ج (- لا) کے تغیرات علامت کی تعداد کے ہے

فرض کرو کہ مساوات ن درجہ کی ہی اور م تعداد مثبت قیمتون کی ہی اور مَ تعداد منفی قیمتون کی اور مو تعداد تغیرات علامت ج (لا) کی

اور مَو تعداد تغیرات علامت ج (-لا) کی چونکہ تمام قیمتین مساوات کی تحقیقی ہین
اسلئی م + مَ = ن اور م زیادہ موسی اور مَ زیادہ مَوسی بموجب دفعہ ۴۳ کے نہین ہو سکتا
اسیواسطے مو + مَو = ن اسواسطی کہ مجموعہ مو اور مَو کا زیادہ ن سی نہین ہو سکتا
پس م + مَ = مو + مَو اور + م نہ زیادہ موسی ہو سکتا ہی اور نہ کم موسی ہو سکتا ہے
اسلئی کہ اگر کم ہو تو مَ بڑا مَوسی ہوتا ہی اور یہہ ناممکن پس م = مو اور مَ = مَو

(۶) فرض کرو کہ مو تعداد تغیرات علامت ج (لا) کی ہو اور مُو تعداد تغیرات علامت ج (-لا) کے ہون تو مساوات ج (لا) =۰ کی موجب قیمتون سی زیادہ قیمتین نہین ہو سکتی اور مَو سی زیادہ منفی قیمتین نہین ہو سکتی اور اسواسطے مو + مُوسی تحقیقی قیمتین زیادہ نہین ہو سکتین اسی معلوم ہوا کہ اگر ن زیادہ مو + مُوسی ہو تو مساوات ج (لا) =۰ کے کم از کم ن - مو - مَو خیالی قیمتین ہونگین دو دفعات ایندہ مین ہم بہت توضیح کے ساتھہ اس بات کو بتلائینگے کہ جب مساوات کامل نہ ہو تو اوسکی خیالی قیمتون کی تعداد کیا ہوتی ہے

(۷) اگر کسی مساوات مین ایک صنف ارقام کی موجود نہ ہو تو جتنی رقمون کی تعداد اس صنف مین ہوگی اوتنی ہی کم از کم خیالی قیمتین اوس مساوات کی ہونگین

فرض کرو کہ ج (لا) مین درمیان لاَا اور لاَم-۲ر+۱ کے ایک صنف ۲ر رقمون کی موجود نہ ہو تو مساوات ج (لا) =۰ کی کم از کم خیالی قیمتین ۲ر ہونگین فرض کرو کہ
ا اور ب مثال لاَم اور لاَم-۲ر-۱ کو ج (لا) مین تعبیر کرین اور ارقام جو موجود نہین وہ مثال ق۱ اور ق۲ اور ق۲ر کے ساتھہ داخل کیجائین تو اس جملہ مین

$$ا لا^{م} + ق_{۱} لا^{م-۱} + ق_{۲} لا^{م-۲} + \ldots + ق_{۲ر} لا^{م-۲ر} + ب لا^{م-۲ر-۱}$$

مین تغیرات علامت کی تعداد مع تواترات علامت کی تعداد کی ۲ر + ۱ ہی اسکو یون بیان کرو کہ اس جملہ کی تغیرات علامت کی تعداد اور اوس جملہ کی تغیرات علامت کی تعداد جسمین علامات لا کی بدل جاوی ملکر برابر ۲ر + ۱ کی ہین اب جو ارقام فرضیہ داخل کی تہین اونکو ساقط کرو

تو اگر ا اور ب کی مختلف علامتیں ہیں تو ایک تغیر علامت کا ج (لا) میں ہوگا اور ج (-لا) میں کوئی تغیر نہ ہوگا اور اگر ا اور ب کی یکساں علامتیں ہیں تو ایک تغیر علامت ج (-لا) میں ہوگا اور ج (لا) میں کوئی تغیر نہ ہوگا اسواسطے دونو صورتوں میں ۲ر رقموں کی ساقط ہونے سے ج (لا) اور ج (-لا) میں نقصان ۲ر تغیرات علامت کا واقع ہوتا ہے

اور یہہ قاعدہ تمام اصناف منقوص پر جنمیں جفت ارقام ہوں حاوی ہی پس اسی معلوم ہوا کہ مساوات ج (لا) =٠ کی اتنی خیالی قیمتیں ہیں جیسے کہ تعداد رقموں کی اس صنف منقوص میں ہے

(۱۷) اگر کسی مساوات میں ایک صنف طاق ارقام کی موجود نہ ہو پس اگر یہہ صنف منقوص ایسی دو رقموں کے درمیان واقع ہی کہ اونکی علامتیں یکساں ہیں تو مساوات کی خیالی قیمتوں کی تعداد اس صنف کی ارقام کی تعداد سی بقدر ایک کے کم از کم زیادہ ہوگی اور اگر صنف منقوص ایسی دو رقموں کی درمیان واقع ہی کہ اونکی علامتیں متضاد ہیں تو مساوات کی خیالی قیمتوں کے تعداد اس صنف کی ارقام کی تعداد سی کم از کم بقدر ایک کے کم ہوگی

فرض کرو کہ ج (لا) میں درمیان $لا^{م}$ اور $لا^{م-۲ر-۲}$ کے ۲ر+۱ رقمیں موجود نہیں ہیں اور $الا^{م}$ اور $بلا^{م-۲ر-۲}$ کی مثال ا اور ب علیحدہ علیحدہ ہیں

پس اگر ا اور ب کی یکساں علامت ہی تو مساوات ج (لا) =٠ کی ۲ر+۲ خیالی قیمتیں ہونگیں اور اگر ا اور ب کی علامتیں متضاد ہیں تو مساوات ج (لا) =٠ کی ۲ر خیالی قیمتیں ہونگیں

فرض کرو کہ ارقام منقوصہ مثال ق۱ اور ق۲ اور ق۳ ... داخل کیجائیں تو جملہ

$$الا^{م} + ق_{۱}لا^{م-۱} + ق_{۲}لا^{م-۲} + \dots + ق_{۲ر+۱}لا^{م-۲ر-۱} + بلا^{م-۲ر-۲}$$

میں تعداد تغیرات علامت کی مع تعداد تغیر علامت کی ۲ر+۲ ہیں یا اس مطلب کو اسطرح ادا کرو کہ اس جملہ کی تغیرات علامت کی تعداد اور اوس جملہ کی تغیرات علامت کی تعداد جسمیں کہ لا کی علامت بدل دیجاوی ملکر ۲ر+۲ ہیں اور جب ارقام فرضیہ جو داخل کیں تہیں خارج کی جائیں تو اگر ا اور ب کی یکساں علامتیں ہیں تو ج (لا) اور ج (-لا) میں کوئی تغیر علامت نہ ہوگا

اور اگر ا اور ب کی علامتین متضاد ہین تو ایک تغیر علامت ج (لا) اور ج (-لا) مین واقع ہوگا اسواسطے ج (لا) مین ۲ ر + ا رقمون کی ساقط ہونی سی ج (لا) اور ج (-لا) کی تعداد تغیرات علامت مین سی ۲ ر + ۲ کا نقصان عاید ہوتا ہی اگر صنف منقوص ارقام متحد العلامت کے درمیان واقع ہو اور ۲ ر تغیرات علامت کا نقصان عاید ہوتا ہی اگر صنف منقوص ارقام مختلف العلامت کی درمیان واقع ہو اور یہہ قاعدہ تمام اصناف منقوصہ پر جنمین تعداد ارقام طاق ہون حاوی ہے اسواسطے مساوات ج (لا) = ۰ کی کم از کم اوتنی قیمتین خیالی ہونگیں جیساکہ دعوی مین بیان کیا ہے

(۷۲) اب دفعہ ۱۷ کی یہہ ایک مثال ہی کہ اگر ج (لا) مین دو رقمین یکسان علامت کی ہون اور اونکی درمیان ایک رقم مفقود ہو تو کم از کم اوسکی دو ناممکن قیمتین ہونگین اور اگر ایک رقم ایسی دو رقمون کی درمیان مفقود ہو کہ اونکی علامتین متضاد ہون تو اسی کچھہ نتیجہ ہم نہین نکال سکتی کہ اوسکی خیالی قیمتین کتنی ہین

اب اس بات پر بہی غور کرنی چاہی کہ ارقام منقوصہ کی نسبت سی ج (لا) اور ج (-لا) کے تغیرات علامت کی تعداد چہوٹی مساوات کی درجہ کی تعداد سی ہوتی ہی اور ان دونو تعدادون کا حاصل تفریق جفت عدد ہوتا ہی

دفعات ۷۰ اور ۷۱ کی دو ممکن صورتون کی امتحان کرنی سی یہہ بات ظاہر معلوم ہوتی ہی یعنی اگر طریقہ کتابت مقادیر کو موافق دفعہ ۶۹ کے اختیار کرین تو عدد ن - مو - مو ہمیشہ ایک جفت عدد ہوتا ہی اور موافق دفعہ ۱۸ کی ہم کو اسی نتیجہ کی نکلنی کی پہلی سی توقع تہی

باب ششم مساوی قیمتین

(۷۳) بعض اوقات تو اس بات کی معلوم ہونیکی کہ مساوات مفروضہ مساوی قیمتین رکہتی ہے ضرورت پڑتی ہی اور بعض اوقات اس بات کی جاننی سی آسانی ہوتی ہی چنانچہ یہہ بات اس کتاب کے آگے مطالعہ کرنی سی معلوم ہو جائیگی اسیواسطے اب اس بات کو بیان کرینگی کہ کسطرح مساوات کی متساوی قیمتون کو تحقیق کرتی ہین اور کسطرح اون اجزاء ضربی کو موافق

مساوی قیمتون کی مساوات مین ہوتی ہین خارج کرتے ہین اور کسطرح خارج کرکے مساوات کی تحویل ایسی مساوات کی طرف کرلیتی ہین کہ اوسکی قیمتین غیر مساوی ہوتی ہین اول ہم ایک خاصیت جملہ معلوم کی اول جملہ مشتقہ کی ثابت کرتے ہین

(۷۴) اگر ج (لا) ایک جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ہو اور جَ (لا) اوسکا اول جملہ مشتقہ ہو تو یہہ ہوگا کہ

جَ (لا) = ج لا / (لا - ا) + ج (لا) / (لا - ب) + ج (لا) / (لا - ج) + . . . + ج (لا) / (لا - ک)

اسمین ا اور ب اور ج . . . ک خیالی اور حقیقی قیمتین مساوات ج (لا) = ۰ کی ہین وجہ اسکی یہہ ہی کہ ج (لا) مین لا کی اعلی قوت کا سر ع. فرض کرو تو بموجب دفعہ ۳۲ کے ہم کو یہہ متطابقہ حاصل ہوگا کہ

ج (لا) = ع. (لا - ا) (لا - ب) (لا - ح) . . . (لا - ک) (۱)

د + ی بجای لا کے رکہو تو

ج (د + ی) = ع. (د + ی - ا) (د + ی - ب) (د + ی - ح) . . . (د + ی - ک)

ہر طرف مساوات کو ایک سلسلہ مین ہوافق قوای متصاعدہ ی کی پہلاؤ تو بموجب دفعہ ۱۲ کے دائین طرف کی یہہ صورت ہوگی کہ

ج (د) + جَ (د) ی + جً (د) ی۲ / (۲ × ۱) + . . .

پس سری کا جَ (د) ہی اور اسیواسطے جَ (د) برابر ہوگا بائین طرف مین ی کی سر کے یعنی

ع. (د - ب) (د - ح) . . . (د - ک) + ع. (د - ا) (د - ح) . . . (د - ک) + . . .

یعنی ج (د) / (د - ا) + ج (د) / (د - ب) + ج (د) / (د - ح) + . . . ج (د) / (د - ک)

اور مقادیر متغیر کی واسطے ہر رمز کو کام مین لاسکتی ہین جسکی کچھ ہی قیمت ہو اسلئی د کو لا سی بدل تی ہین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

جَ (لا) = ج (لا) / (لا - ا) + ج (لا) / (لا - ب) + ج (لا) / (لا - ح) + . . . + ج لا / (لا - ک) (۲)

اب یہہ نتیجہ اوس صورت مین بہی صحیح ہی کہ مقادیر ا و ب و ج . . . مین

ایک یا کئی برابر ا یا برابر ب کی ہو . . . اور علے ہذا القیاس
اب کل مین فرض کرو کہ ا ٹھیک ر دفعہ اور ب ٹھیک ص دفعہ اور ح ٹھیک ط دفعہ . . . واقع ہوتا ہے
(۱) کو اسطرح لکھہ سکتی ہین کہ

ج (لا) = ع. (لا − ا)^ر (لا − ب)^ص (لا − ح)^ط . . . .

اور (۲) کو اسطرح لکھہ سکتی ہین

جَ (لا) = ر ج (لا) / (لا − ا) + ص ج (لا) / (لا − ب) + ط ج (لا) / (لا − ح) + . . .

(۷۵) اگر ج (لا) اور جَ (لا) کا کوی وفق مشترک جسمین لا ملتفہ ہو ہوگا تو مساوات ج (لا) = ۰ کے برابر قیمتین ہونگین اور اگر وفق مشترک نہ ہوگا تو کوئی برابر قیمت نہین ہوگی
فرض کرو کہ ا و ب و ج . . . ک حقیقی یا خیالی قیمتین مساوات ج (لا) = ۰ کے ہین تو

ج (لا) = ع. (لا − ا) (لا − ب) (لا − ج) . . . (لا − ک)

تو جَ (لا) = ع. (لا − ب) (لا − ج) . . . (لا − ک) + ع. (لا − ا) (لا − ج) . . . (لا − ک) . . .
اگر ا اور ب اور ج . . . ک تمام غیر مساوی قیمتین ہون تو اجزاء ضربی (لا − ا) و (لا − ب) لا − ج و . . . لا − ک مین کوئی جز ضربی جَ (لا) کو نہین تقسیم کریگا وجہ اسکی یہہ ہے کہ لا − ا ہر یک رقم جَ (لا) کو پورا تقسیم کرتا ہی مگر اول رقم کو نہین تقسیم کرتا اور علی ہذا القیاس اور اجزاء ضربی کی کیفیت ہی اور ان اجزاء ضربی مین سی حاصل ضرب بہی کتنی ایک اجزاء ضربی کا نہین پورا تقسیم کریگا اسی ثابت ہوا کہ اگر ج (لا) اور جَ (لا) دئی وفق مشترک نہین رکہتا تو ج (لا) کوئی مساوی اجزاء ضربی نہین رکہتا پس معلوم ہوا کہ اگر ج (لا) اور جَ (لا) وفق مشترک رکہتی ہون تو ج (لا) کی سب اجزاء ضربی غیر مساوی بہی نہین ہو سکتے
دوم فرض کرو کہ مساوات ج (لا) = ۰ کی برابر قیمتین ہین اور ر دفعہ ا اور ص دفعہ ب اور ط دفعہ ج اور علی ہذا القیاس واقع ہوتا ہے تو

جَ (لا) = ع. (لا − ا)^ر (لا − ب)^ص (لا − ج)^ط . . . { ر / (لا − ا) + ص / (لا − ب) + ط / (لا − ج) + . . . }

اس صورت مین جز ضربی $(لا - ا)^{ع-۱} (لا - ب)^{ص-۱} (لا - ح)^{ط-۱}$
جَ (لا) کی ہر رقم مین واقع ہوتا ہی پس اگر ج (لا) کے برابر اجزاء ضربی ہون تو
ج (لا) اور جَ (لا) کا وفق مشترک ہوگا اسی معلوم ہوا کہ اگر ج (لا) اور جَ (لا) کا
وفق مشترک نہ ہو تو ج (لا) کے برابر اجزاء ضربی نہین ہونگے

(۷۶) اس مساوات پر خیال کرو کہ

$$ج(لا) = لا^{۴} - ۱۱ لا^{۳} + ۴۴ لا^{۲} - ۷۶ لا + ۴۸ = ۰$$

یہان $جَ(لا) = ۴ لا^{۳} - ۳۳ لا^{۲} + ۸۸ لا - ۷۶$

اب یہان یہہ دریافت ہوتا ہی کہ ج (لا) اور جَ (لا) کا وفق مشترک لا - ۲ ہی اسی ثابت ہوتا ہے کہ
$(لا - ۲)^{۲}$ ایک جز ضربی ج (لا) کا ہے اور یہہ بھی دریافت ہوتا ہے کہ

$$ج(لا) = (لا - ۲)^{۲} (لا^{۲} - ۷ لا + ۱۲) = (لا - ۲)^{۲} (لا - ۳) (لا - ۴)$$

پس ج (لا) کے قیمتین ج (لا) = ۰ کی ۲ و ۲ و ۳ و ۴ ہین

اب پھر اس مساوات پر خیال کرو کہ

$$ج(لا) = ۲ لا^{۴} - ۱۲ لا^{۳} + ۱۹ لا^{۲} - ۶ لا + ۹ = ۰$$

یہان یہہ دریافت ہوگا کہ ج (لا) اور جَ (لا) وفق مشترک لا - ۳ رکھتی ہین اور
$ج(لا) = (لا - ۳)^{۲} (۲ لا^{۲} + ۱)$ پس قیمتین ج (لا) = ۰ کی
۳ و ۳ و $+\sqrt{-\frac{۱}{۲}}$ و $-\sqrt{-\frac{۱}{۲}}$ ہین

(۷۷) دفعہ ۷۵ مین یہہ عبارت جو لکہی ہین کہ جسمین لا ملتفت ہو اوسی یہہ غرض ہی کہ ہم جز ضربی
ع پر کچھہ لحاظ نہین کرتی گو وہ بعض لحاظ سی وفق مشترک ج (لا) اور جَ (لا) کا خیال کیا جاسکتا ہے
اب چونکہ اول دفعہ مین جملون کے وفق مشترک کا ذکر چھیڑا ہی اسلئی مناسب معلوم ہوتا ہی کہ ہم کچھہ کیفیت
اس مضمون کی لکہین دستور کی بات ہی کہ وفق مشترک اور وفق اعظم مشترک کے مسائل الجبرا مین
بیان ہوتی ہین مگر یہہ کچھہ ضرور نہین کہ ابتدا تحصیل ریاضیہ مین ہی ان مسائل کو طلبا مطالعہ کرین

بلکہ وہ بعد دفعہ ۲۳ کے ما حصل کے خوب سمجھہ مین آتا ہی فرض کرو کہ
ج (لا) اور مج (لا) دو جملون صحیحہ ناطقہ لا کو تعبیر کرتا ہی تو ج (لا) اور مج (لا) کو اجزاء ضربی مین تحلیل کر سکتی ہین کہ

ج (لا) = ع. (لا - ا۱) (لا - ا۲) (لا - ا۳) . . . .

مج (لا) = ق. (لا - ب۱) (لا - ب۲) (لا - ب۳) . . . .

اور ان جملون مین سی ہر یک صرف ایک طور سی اجزاء ضربی مین تحلیل ہو سکتا ہے

اسی معلوم ہوا کہ جملہ لا کا اعلی درجہ کا دونو ج (لا)

اور مج (لا) کو جو پورا تقسیم کریگا وہ حاصل ضرب اجزاء ضربی مشترک اول درجہ لا کا ہوگا

اور اسکو ہم ج (لا) اور مج (لا) کا دفق مشترک اعظم کہتے ہین

یہان ہم کچھہ لحاظ ع. اور ق. کا نہین کرتی اگر ہم چاہین تو عددی دفق اعظم اونکا اگر وہ دونو عدد ہون نکال لین اور اگر وہ کسی اور مقدار مثلاً ر کے جملے ہون تو ان ر کی جملون کا دفق مشترک اعظم دریافت کرلین

(۷۸) فرض کرو کہ ج (لا) = ع. (لا - ا)^ر (لا - ب)^ص (لا - ج)^ط . . . . تو

بموجب دفعہ ۷۵ کی دفق مشترک (لا - ا)^(ر-۱) (لا - ب)^(ص-۱) (لا - ج)^(ط-۱) . . . .

ہوگا پس دفق مشترک اون تمام اجزاء ضربی مساویہ سی ملتف ہی جو ج (لا) مین واقع ہوتی ہے

اور ہر صورت مین قوت نما اپنی نظیر کی قوت نما سی ج (لا) مین بقدر ایک کے کم ہی اور ج (لا)

کو دفق مشترک ج (لا) اور مجَ (لا) پر تقسیم کرین تو خارج قسمت مین تمام اجزاء

جو ج (لا) مین واقع ہوتی تہی ملتف ہونگی اور ہر یک جزء ضربی ایک دفعہ واقع ہوگا پس جو مساوات اس خارج قسمت

کو برابر صفر کی لکھنی سی حاصل ہوگی اوسمین کوئی قیمت مکرر مساوات ج (لا) = ۰ کی نہین واقع ہوگی

(۷۹) ہم دیکھتی ہین کہ اگر جزء ضربی (لا - ا)^ر کا ج (لا) مین واقع ہو تو جزء ضربی

(لا - ا)^(ر-۱) کا جَ (لا) مین واقع ہوگا اصلی مساوات جَ (لا) = ۰ کے

ر - ا قیمتین ہونگین جنمین سی ہر واحد مساوی ا کی ہوگی اب جً (لا) اول جملہ مشتقہ جَ (لا)

کا ہی پس اگر ر - ا بڑا بہ نسبت ا کی ہو تو جَ (لا) اور جً (لا) کا ایک دفق مشترک ہوگا

اور مساوات جً (لا) = ۰ کی ر-۲ ہونگین جنمین سی ہر ایک برابر ا کے ہوگا

پس اسطرح ہم ثابت کرسکتی ہین کہ (لا - ا)^{ر} ایک جز ضربی ج (لا) کا ہو جو مشتق سب جملے

جَ (لا) و جً (لا) . . . جَ$^{ر-۱}$ (لا) سب کے سب لا = ا سے فنا ہوجائینگے

اور یہہ اسطرح بہی ثابت ہوسکتی ہین

فرض کرو کہ ج (لا) = (لا - ا)^{ر} مج (لا) اسمین مج (لا) ایک جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا فرض کیا گیا ہے

جسمین جز ضربی لا - ا داخل نہین ہے لا = ا + ی رکہو تو

ی^{ر} مج (ا + ی) = ج (ا + ی)

= ج (ا) + جَ (ا) ی + . . + ج^{ر} (ا) $\frac{ی^{ر}}{|ر}$ + . . . + ج^{ن} (ا) $\frac{ی^{ن}}{|ن}$ +

اب دائین طرف کا رکن ی^{ر} پر پورا تقسیم ہوتا ہی تو بائین طرف کا رکن بہی پورا ی^{ر} پر پورا تقسیم ہونا چاہیے

پس یہہ حاصل ہوگا کہ

ج (لا) = ۰ جَ (ا) = ۰ . . . ج$^{ر-۱}$ (ا) = ۰

اور چونکہ دائین طرف کا رکن پورا ی کی کسی قوت پر جو ی^{ر} سی اعلی درجہ رکہتی ہو نہین تقسیم ہوتا

اسلیئی ضروری کہ بائین طرف کا رکن بہی ایسا ہو اسیواسطی ج^{ر} (ا) صفر نہین ہے پس

تعداد ارقام سلسلہ ج (لا) اور جَ (لا) اور جً (لا) . . مین جو لا = ا کی ہونی سی فنا ہوتی ہین

اوتنی ہی جتنی لا - ا کا ج (لا) مین قوت نما ہے

مثلاً فرض کرو کہ

ج (لا) = لا^{۵} + ۲ لا^{۴} + ۳ لا^{۳} + ۷ لا^{۲} + ۸ لا + ۳

یہان یہہ دریافت ہوگا کہ سلسلہ ج (لا) و جَ (لا) . . . مین

جً (لا) اول ہی لا = -۱ سی فنا نہین ہوتا پس جز ضربی (لا + ۱)^{۳} کا ج (لا) مین

واقع ہوتا ہے اور یہہ دریافت ہوگا کہ ج (لا) = (لا + ۱)^{۳} (لا^{۲} - لا + ۳)

(۸۰) ایک اور طریقہ مختصر مساوی قیمتون کی تحقیق کرنے کا ہم بیان کرتے ہین

اگر مساوات ج (لا) = ۰ کی ایک سی زیادہ قیمتین برابر ا کی رکہتی ہو تو اسی یہہ نتیجہ نکلیگا
کہ ج (لا) کو لا - ا پر تقسیم کرنی سی جو خارج قسمت نکلتا ہی وہ لا = ا سی معدوم ہوتا ہے
پس موافق دفعہ ۷ کے ... خارج قسمت کی نکالنے سی یہہ حاصل ہو گا کہ

ن ع۰ ا^ن-۱ + (ن-۱) ع۱ ا^ن-۲ + ... + ۲ ا ع ن-۲ + ع ن-۱ = ۰

یعنی جَ (لا) فنا ہو جائیگا جب لا = ا کے ہو

(۸۱) پس اسی یہہ معلوم ہوا کہ جب ہم کو مساوات ج (لا) = ۰ کی برابر قیمتوں کا دریافت کرنا منظور خاطر ہو تو ہم اغاز سطح کرین کہ + وفق مشترک اعظم ج (لا) اور جَ (لا) کا دریافت کرین اور اس وفق مشترک اعظم کو برابر صفر کی لکہہ کر مساوات بنائیں تو پہر ایک مساوات حل کرنی کی لئی ایسی حاصل ہو جائینگی کہ جسکی قیمتین وہ ہونگین جو مساوات ج (لا) = ۰ کی مکرر قیمتین ہین اور چونکہ یہہ وفق مشترک اعظم خود ایک پیچیدہ جملہ ہو سکتا ہی جسمین اجزاء ضربیہ مساویہ ملتف ہون اسواسطی یہہ فایدہ مند ہو گا کہ ہم عمل کو ایسی ضبط اور نظم کی ساتہہ کرین کہ قیمتیں حتی الامکان تہوڑی سی محنت سی حاصل ہو جائیں اور اب اس بات کو ہم لکہتی ہین

(۸۲) فرض کرو کہ ج (لا) = ۰ ایک مساوات ہو جسکی برابر قیمتین ہون اور

ج (لا) = لا۱ لا۲^۲ لا۳^۳ لا۴^۴ ... لام^م

اسمین حاصل ضربون تمام اجزاء ضربی کا جو ایک دفعہ واقع ہوتی ہین لا۱ سی اور حاصل ضربون اجزاء ضربی کا جو دو دفعہ واقع ہوتی ہین لا۲^۲ سی اور حاصل ضربون اجزاء ضربی کا جو تین دفعہ واقع ہوتے ہین لا۳^۳ سی اور علی ہذا القیاس تعبیر ہوئی ہین اگر کوئی جز ضربی ج (لا) مین اوتنی دفعہ نہ ایا ہو گا جتنی دفعہ کہ بیان کیا گیا تو ایک یا کی مقادیر

لا۱ و لا۲ و لا۳ ... مین سی برابر واحد کی ہو جائیگین

اب ج (لا) سی اول جملہ مشتقہ جَ (لا) کا حاصل کرو اور پہر وفق مشترک اعظم ج (لا) اور جَ (لا) کا حاصل کرو اور اس وفق اعظم کو ج۱ (لا) سے تعبیر کرو

ج۱ (لا) = لا۲ لا۳^۲ لا۴^۳ . . . . لام^م-۱

اور پھر دونوں اعظم ج۱ (لا) اور اوسکی اول جملہ مشتقہ جَ۱ (لا) کا حاصل کرو اور اوسکو ج۲ (لا) سے تعبیر کرو

تو ج۲ (لا) = لا۳ لا۴^۲ . . . لام^م-۲

اسیطرح متواتر عمل کئے جاؤ تو

ج۳ (لا) = لا۴ لا۵^۲ . . . لام^م-۳

ج۴ (لا) = لا۵ . . . لام^م-۴

. . . . .

جم-۱ (لا) = لام

جم (لا) = ۱

اب ایک نیا سلسلہ جملوں کا اسطرح تبدیل کرو کہ سلسلہ

ج (لا) ، ج۱ (لا) ، ج۲ (لا) . . . جم (لا) . . . .

ہر رقم کو جم-۱ (لا) تک اپنے ماقبل کی رقم پر تقسیم کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

ج (لا) / ج۱ (لا) = لا۱ لا۲ . . . لام = مج۱ (لا) کے مقرر کرو

ج۱ (لا) / ج۲ (لا) = لا۲ . . . لام = مج۲ (لا) کے مقرر کرو

جم-۲ (لا) / جم-۱ (لا) = لام-۱ لام = مجم-۱ (لا) کے مقرر کرو

جم-۱ (لا) / جم (لا) = لام = مجم (لا) کے مقرر کرو

پس اخر کو یہہ حاصل ہوگا کہ

مج۱ (لا) / مج۲ (لا) = لا۱ ، مج۲ (لا) / مج۳ (لا) = لا۲ . . . مجم-۱ (لا) / مجم (لا) = لام-۱ اور مجم (لا) = لام

غرض اجزا ضربی لا۱ اور لا۲ . . . لام اب علیحدہ علیحدہ ہوگئی اور مساواتوں

لا۱ = ۰ اور لا۲ = ۰ اور . . . لام = ۰ کے حل کرنے سے قیمتین

مساوات مفروضہ ج (لا) کی حاصل ہوجائیگی اور کوئی قیمت $کا_{ر} = ۰$ سے جو دریافت ہوگی
وہ ر دفعہ مساوات ج (لا) = ۰ مین واقع ہوگی

(۸۳) دفعہ گذشتہ کی عمل کی لئی یہہ مثال ہی فرض کرو کہ

$$ج(لا) = لا^{۸} + لا^{۷} - ۸لا^{۶} - ۶لا^{۵} + ۲۱لا^{۴} + ۹لا^{۳} - ۲۲لا^{۲} - ۴لا + ۸$$

اب طریقہ کتابت جملون کا دفعہ سابق کی موافق رہنی دین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$ج_{۱}(لا) = لا^{۴} + لا^{۳} - ۳لا^{۲} - لا + ۲$$

$$ج_{۲}(لا) = لا - ۱$$

$$ج_{۳}(لا) = ۱$$

$$مج_{۱}(لا) = لا^{۴} - ۵لا^{۲} + ۴$$

$$مج_{۲}(لا) = لا^{۳} + ۲لا^{۲} - لا - ۲$$

$$مج_{۳}(لا) = لا - ۱$$

$$کا_{۱} = لا - ۱$$

$$کا_{۲} = لا^{۲} + ۳لا + ۲$$

$$کا_{۳} = لا - ۱$$

اسیواسطے $ج(لا) = (لا - ۲)(لا^{۲} + ۳لا + ۲)^{۲}(لا - ۱)^{۳}$

$$= (لا - ۲)(لا + ۱)^{۲}(لا + ۲)^{۲}(لا - ۱)^{۳}$$

اور قیمتین مساوات ج (لا) = ۰ کی ۲ و −۱ و −۱ و −۲ و −۲ و ۱ و ۱ و ۱ ہین

(۸۴) جب ایک مساوات کی امثال سب کے سب مقادیر ناطقہ محدودہ ہونگے تو دفعہ ۸۲ مین
$کا_{۱}$ و $کا_{۲}$ . . . کی امثال ناطقہ محدودہ ہونگے اسی معلوم ہوا کہ اگر صرف ایک ہی قیمت
مساوات کی قیمتون مین سی جسمین امثال مقادیر ناطقہ محدودہ ہون ر دفعہ مکرر لین تو وہ
مقدار ناطقہ محدودہ ہوگی کیونکہ وہ مساوات $کا_{ر} = ۰$ نکلیگی جسمین مقادیر غیر ناطقہ ملتف نہین ہین

اسی ہم یہہ نتیجہ نکالتی ہین کہ ایک مساوات تیسرے یا پانچوین درجہ کی جسمین امثال مقادیر ناطقہ محدودہ ہون اور اوسکی کوئی قیمت ناطقہ محدودہ نہ ہو تو اوسکی برابر کوئی قیمتین نہین ہونگین اور اگر مساوات چوتھی درجہ کی ہو اور اوسکی امثال ناطقہ محدودہ ہون اور کوئی قیمت اوسکی ناطقہ محدودہ نہ ہو اور یہی اوسکی برابر قیمتین ہون تو اوسکی دو قیمتین غیر ناطق ہونگین اور ہر ایک دو دفعہ مکرر آئینگی پس اگر ج (لا) =۰ مساوات ہو تو ج (لا) ایک مجذور کامل ہوگا

ساتوان باب مساوات کی قیمتون کی حدود غائی اور قیمتون کا جدا جدا کرنا

(۸۵) اب ہم چند مسائل لکھتی ہین جنسی یہہ دریافت ہوگا کہ مساوات کی تمام حقیقی قیمتین حدود غائی کی درمیان واقع ہین اور پہر ہم اس بات کی تحقیق کرینگے کہ ہر قیمت کی جدا جدا حد غائی دریافت کرنی کہان تک ممکن ہی اور ایسی مسایل کی لکہنی کا فائدہ یہہ ہی کہ چوتھی درجہ کی مساوات سی زیادہ درجہ کا مساوات عامہ کا حل جبریہ نہین حاصل ہو سکتا مگر ہم کو علم بعض خاص قیمتون کا تقریباً حاصل ہوتا ہی اور اوسکی استعانت سی ہم مساواتون کا اعداد مین حل کر سکتی ہین غرض ان حدود غائی کی معلوم ہونی سی تقریبی قیمتون کا علم ہوگا اور پہر اوسی مساواتون کا حل چوتھی درجہ سی زیادہ کا دریافت ہوگا

اس ساری باب مین ہر جگہ قیمت سی حقیقی قیمت سمجہی جائے اگر کہین اوسکی خلاف نہ بیان کیا گیا ہو تمام باب حقیقی قیمتون ہی سے متعلق ہے

(۸۶) جب ہم کہتی ہین کہ ایک خاص مقدار مساوات کی مثبت قیمتون کی اعلی حد غائی ہی تو اوس سی مراد یہہ ہوتی ہی کوئی مثبت قیمت مساوات کی اوس مقدار سی زیادہ نہین ہو سکتی

(۸۷) جو مساوات اپنی سادی صورت مین ہو اوسمین جو منفی امثال سب سے بڑا تعداد اًہو اگر ایک زیادہ کرو تو حاصل جمع اس مساوات کی مثبت قیمتون کا اعلی حد غائی ہوگا

فرض کرو کہ ج (لا) =۰ مساوات ن درجہ کی ہی اور تعداداً ع سب سے بڑا منفی امثال ج (لا) مین ہی پس اگر ایک قیمت لا کی ایسی دریافت کیجاہی کہ ج (لا) اس قیمت کی موافق اور اوسی تمام بڑی قیمتون کی موافق مثبت ہو تو وہ قیمت مساوات ج (لا) =۰ کی مثبت

کی مثبت قیمتوں کی اعلی حد غائی ہوگی اب اگر کوئی مثبت قیمت لا کی

لا^ن – ع (لا^ن-۱ + لا^ن-۲ + لا^ن-۳ + ۰۰۰ + لا + ۱)

کو مثبت بنا دے تو وہ بدرجہ اولی ج (لا) کو مثبت بنائیگی یعنی لا کی مثبت قیمت سے ج (لا) مثبت ہوتا ہے

اگر لا^ن – (لا^ن – ۱)/(لا – ۱) مثبت ہے اور جب یہہ مثبت ہے تو لا^ن – ا ع (لا^ن – ۱)/(لا – ۱)

بدرجہ اولی مثبت ہے یعنی اگر (لا^ن – ۱) (۱ – ع/(لا – ۱)) مثبت ہے اور اخر جملہ مثبت ہوگا

اگر لا – ۱ بڑا ع سے ہے پس ج (لا) مثبت ہے اگر لا برابر ع + ۱ کے ہو

یا ع + ۱ سے بڑا ہو یعنی ع + ۱ اعلی حد غائی مساوات ج (لا) = ۰ کی مثبت قیمتوں کی ہے

(۸۸) اگر مساوات ج (لا) = ۰ میں بجاے لا کی – ی مندرج کریں اور ن طاق عدد ہو تو

ہر رقم کی ایسی علامت بدل دو کہ یٰ کا سر + ۱ ہو اور فرض کرو کہ اس صورت کی مساوات کا

ق تعداد اُس سے بڑا منفی سر ہو تو ق + ۱ اعلی حد غائی ی کی مثبت قیمتوں کی ہوگی

اور اسیواسطے – (ق + ۱) حد غائی لا کی منفی قیمتوں کی ہے

پس اس سے معلوم ہوا کہ مساوات ج (لا) = ۰ کی سب قیمتیں درمیان ع + ۱ اور – (ق + ۱) کے واقع ہوتی ہیں

پس اگر مساوات میں تعداد اُس سے بڑی امثال بغیر لحاظ علامت کی م ہو تو مساوات کی تمام قیمتیں

درمیان م + ۱ اور – (م + ۱) کے واقع ہونگیں

(۸۹) اگر مساوات ن درجہ کی اپنی سادی صورت میں ہو اور عددی قیمت سب سے بڑی امثال کی

ع ہو اور لا^ن-ر سب سے بڑی درجہ کی قوت لا کی ہو جو منفی امثال رکھتی ہو تو ۱ + $\sqrt[ر]{ع}$

اعلی حد غائی مثبت قیمتوں کی ہوگی

فرض کرو کہ ج (لا) = ۰ مساوات مفروضہ ہو چونکہ تمام رقمیں ماقبل لا^ن-ر کے مثبت امثال

رکھتی ہیں تو ج (لا) یقینی لا کی مثبت قیمت کے موافق مثبت ہوگا اگر

لا^ن – ع (لا^ن-ر + لا^ن-ر-۱ + ۰۰۰ + لا^۲ + لا + ۱)

مثبت ہو یعنی اگر لا^ن – ع (لا^ن-ر+۱ – ۱)/(لا – ۱) مثبت ہو پس لا بڑا واحد سے فرض کرو

توج (لا) مثبت بدرجہ اولی ہوگا اگر لا ن - ع لا/(لا - ۱) مثبت ہو یعنی اگر لا ن (لا - ۱) - ع لا ن + ۱ مثبت ہو یعنی اگر لا ۱- (لا - ۱) - ع مثبت ہو یعنی اگر (لا - ۱)۲ برابر یا بڑا ع سی ہو اسی معلوم ہوا کہ اگر لا = ۱ + √ع یا کوئی بڑی قیمت اوسکی ہو توج (لا) مثبت ہے یعنی

۱ + √ع اعلی حد غائی مثبت قیمتون کی مساوات ج (لا) = ۰ مین ہے

(۹۰) اگر مساوات کی سب امثال منفیہ مین سی ہر یک مثبت بنا کر اوسکی ماقبل کی مثال مثبتہ کے مجموعہ پر تقسیم کرین توجو کسر اسطرح سی سب سے بڑی ہوگی اوسپر ایک زیادہ کرنی سی مثبت قیمتون کی حد غائی حاصل ہوگی

فرض کرو کہ مساوات ج (لا) = ۰ ہو اسمین ج (لا)

ع. لا ن + ع۱ لا ن-۱ + ع۲ لا ن-۲ - ع۳ لا ن-۳ + ع۴ لا ن-۴ + ۰۰۰۰ - ع ر لا ن-ر + ۰۰ + ع ن

تعبیر کرتا ہے اب ہم کو معلوم ہے کہ

لا م = (لا - ۱) (لا م-۱ + لا م-۲ + ۰۰۰ + لا + ۱) + ۱

مساوات کے ہر رقم مثبت کو اس صورت قانونیہ کی موافق تبدل کر کی لکھو اور باقی ارقام کو بدستور رہنے دو توج (لا) کی یہہ صورت ہو جائیگی

ع. (لا - ۱) لا ن-۱ + ع. (لا - ۱) لا ن-۲ + ع. (لا - ۱) لا ن-۳ + ۰۰۰ + ع. (لا - ۱) + ع.

+ ع۱ (لا - ۱) لا ن-۲ + ع۱ (لا - ۱) لا ن-۳ + ۰۰۰ + ع۱ (لا - ۱) + ع۱

+ ع۲ (لا - ۱) لا ن-۳ + ۰۰ + ع۲ (لا - ۱) + ع۲

- ع۳ لا ن-۳

اب اس جملہ کی عمودی سطرون کو دیکھو کہ جہان امثال منفیہ نہین ہین وہان سطر عمودی کی قیمت مثبت ہی اگر لا بڑا اسی ہو مگر اوس سطر عمودی مین کہ امثال منفیہ واقع ہون ہم کو یہہ حاصل ہو جاتا ہے کہ

(ع. + ع۱ + ع۲) (لا - ۱) بڑا ع۳ سے ہو

(ع. + ع۱ + ع۲ + ۰۰۰ + ع ر-۱) (لا - ۱) بڑا ع ر سے ہو

اسواسطی چاہی کہ لا بڑا بہ نسبت $\frac{ع_{۳}}{ع_{۰}+ع_{۱}+ع_{۲}}+۱$ ۰۰۰ کی اور
بڑا بہ نسبت $\frac{ع_{ر}}{ع_{۰}+ع_{۱}+ع_{۲}+\cdots+ع_{ر-۱}}+۱$ ۰۰۰ کی ہو اسیواسطی اگر لا
ان مستحصلہ جملوں مین سی سب سی بڑی جملہ کی برابر فرض کیا جاے تو وہ قیمت لا کی اور اوسی ہر یک بڑی قیمت
ج (لا) کو مثبت بنائیگی یعنی ان جملوں مین سی سب سے بڑا جملہ اعلی حد غائی مساوات ج (لا) = ۰
کی مثبت قیمتوں کی ہے

(۹۱) اب ان قاعدوں کی توضیح دو مثالوں سی کرتی ہین اول یہہ مساوات لو

$$لا^{۵}+۸لا^{۴}-۱۴لا^{۳}-۵۳لا^{۲}+۵۶لا-۱۸=۰$$

بموجب دفعہ ۸۷ کی ۵۳ + ۱ یعنی ۵۴ اعلی حد غائی مثبت قیمتوں کی ہی اور بموجب دفعہ
۸۹ کی اس سبب سے کہ لا = ۵ اور ر = ۲ تو حد غائی $۱+\sqrt{۵۳}$ ہی یعنی ۹ حد غائی ہے
اور بموجب دفعہ ۹۰ کی ان جملوں $\frac{۱۴}{۱+۸}+۱$ اور $\frac{۵۳}{۱+۸}+۱$ اور $\frac{۱۸}{۱+۸+۵۶}+۱$
مین سب سے بڑا جملہ لینا چاہئی یعنی $\frac{۵۳}{۹}+۱$ اسی معلوم ہوا کہ حد غائی ۷ ہے
اب یہہ مساوات لو کہ

$$لا^{۵}-۵لا^{۴}-۱۳لا^{۳}+۲لا^{۲}+لا-۷۰=۰$$

یہان دفعات ۸۷ اور ۸۹ سی ۷۰ + ۱ حد غائی ہی اور بموجب دفعہ ۹۰ کے $\frac{۷۰}{۴}+۱$
حاصل ہوتا ہے اسی معلوم ہوا کہ ۱۹ حد غائی ہے
پس دونو مثالون مین دفعہ ۹۰ سی اعلی حد غائی سب سے چھوٹی معلوم ہوتی ہی اب یہہ بات آسانی سے
معلوم ہوتی ہی کہ دفعہ ۸۹ سی بہ نسبت دفعہ ۸۷ کی چھوٹی حد غائی معلوم ہوتی ہی مگر ر = ۱ کے
صورت مستثنی ہی اسمین دونو حدود غائی مین تطبیق ہو جاتی ہی علی العموم دفعہ ۸۹ زیادہ کام
دیتی ہے جب اکثر مثبت اشکال شکل منفیہ اول کے واقع ہون جسکی سبب سے ر بڑا ہو جاے
اور دفعہ ۹۰ سی ہمیشہ بہ نسبت دفعہ ۸۷ کی چھوٹی حد غائی معلوم ہوتی ہی مگر یہہ صورت مستثنی ہی کہ
سب سے بڑی منفی اشکال کی ماقبل ایک ہی مثبت اشکال ہو یعنی اول ہی رقم ہو اس صورت مین

دونوں حدود میں تطبیق ہوجاتی ہی علی العموم دفعہ ۹۰ وہاں زیادہ کام دیتی ہی کہ مثال مشتبہ قبل امثال منفی کی واقع ہوں

(۹۲) بعض حکمتیں ایسی ہیں کہ ہم اکثر قواعد عامہ کی نسبت اعلی حدغائی چھوٹی دریافت کرلیتی ہیں دفعہ گذشتہ کی اول مثال پرخیال کرو اب یہاں مساوات ج (لا) =۰ کی مثبت قیمتوں کی حد اعلی دریافت کرنی ہے اسمیں ج (لا) کو اسطرح لکھہ سکتی ہیں کہ

$$لا^۲ (لا^۳ - ۵۳) + ۸ لا^۲ (لا - \frac{۱۴}{۸}) + ۵۶ (لا - \frac{۹}{۲۸})$$

اب اگر لا برابر ۴ کی یا اوسی کسی بڑی قیمت کی برابر ہو تو خطوط وحدانی کی مابین جملی سب مثبت ہیں اور ایسی ہی ج (لا) مثبت ہی پس ۴ حدغائی مساوات ج (لا) =۰ کے مثبت قیمتوں کی ہے

اب دفعہ مذکور کی دوسرے مثال پرخیال کرو کہ اوسمیں ج (لا) کو اسطرح لکھہ سکتے ہیں کہ

$$لا^۳ (لا^۲ - ۵ لا - ۱۳) + ۲ لا^۲ + لا - ۷$$

اب دفعہ ۸۷ کی امداد سی ہم دیکھتی ہیں کہ $لا^۲ - ۵ لا - ۱۳$ مثبت ہی اگر $لا = ۱۳ + ۱$ یا اسی بڑی قیمت کی برمساوات ج (لا) =۰ کی مثبت قیمتوں کی ۱۴ اعلی حدغائی ہے

(۹۳) اب بہت اسانی سی مساوات کی مثبت قیمتوں کی حدغائی دریافت کرسکتی ہیں یعنی ایسا عدد دریافت کرسکتی ہیں کہ وہ کسی مثبت قیمت سی مساوات کی بڑا نہو

مساوات کو ہیئت بدل کر ایسی مساوات بناؤ کہ جسکی قیمتیں متکافی مساوات مفروضہ کی جذر اعظم ہوں

اب اس بدلی ہوئی مساوات کی مثبت قیمتوں کی اعلی حدغائی مساوات مفروضہ کی مثبت قیمتوں کی ادنی حدغائی ہوگی مثلاً فرض کرو کہ مساوات مفروضہ یہہ ہو

$$لا^ن + ع_۱ لا^{ن-۱} + ع_۲ لا^{ن-۲} + \cdots + ع_{ن-۱} لا + ع_ن = ۰$$

لا کی جگہہ $\frac{۱}{ی}$ رکھو اور $ی^ن$ میں ضرب دو اور $ع_ن$ پر تقسیم کرو تو بدلی ہوئی مساوات یہہ حاصل ہوگی کہ

$$ی^ن + \frac{ع_{ن-۱}}{ع_ن} ی^{ن-۱} + \cdots + \frac{ع_۲}{ع_ن} ی^۲ + \frac{ع_۱}{ع_ن} ی + \frac{۱}{ع_ن} = ۰$$

اب دفعات گذشتہ مین سی کسی ایک دفعہ کی موافق اعلی حد غائی اس مساوات کی دریافت کرو اور اوسکو ل سی تعبیر کرو تو $\frac{1}{\text{ل}}$ ادنی حد غائی مساوات مفروضہ کی مثبت قیمتون کی ہوگی اب فرض کرو کہ ہم دفعہ ۸۷ کی موافق اعلی حد غائی دریافت کرتی ہین اور $\frac{\text{ع}_\text{ر}}{\text{ع}_\text{ن}}$ کو سب سے بڑا امثال منفی تعداداً بدلی ہوئی مساوات مین مانتی ہین تو $1 - \frac{\text{ع}_\text{ر}}{\text{ع}_\text{ق}}$ اعلی حد غائی بدلی ہوئی مساوات کی مثبت قیمتون کی ہوگی اور اسیواسطی مساوات مفروضہ کی مثبت قیمتون کی ادنی حد غائی $\frac{\text{ع}_\text{ن}}{\text{ع}_\text{ن} - \text{ع}_\text{ر}}$ ہے

یہان ع~ن~ واقعی تعداداً سب سے بڑا امثال مساوات مفروضہ مین ہی جو ع~ن~ سے علامت میں اختلاف رکھتا ہے

مثلاً دفعہ ۹۱ مین ع~ن~ = −۱۸ اور ع~ر~ = ۵۶ پس $\frac{-18}{-18-56}$ یعنی $\frac{18}{74}$ یعنی مساوات مفروضہ کی مثبت قیمتون کی حد غائی $\frac{18}{74}$ ہے

(۹۴) مساوات ج (لا) = ۰ کی منفی قیمتون کی حدود غائی دریافت کرو لا کی جگہہ −ی لکھو اور اسطرح جو بدلی ہوئی مساوات حاصل ہو اوسکی مثبت قیمتون کی حدود غائی دریافت کرو تو یہہ حدود غائی جنکی علامتین بدلی ہوئی ہین مساوات مفروضہ کی منفی قیمتون کی حدود غائی ہونگین مثلاً مساوات

$$\text{لا}^5 - 7\text{لا}^4 - 15\text{لا}^3 + 3\text{لا}^2 + 4\text{لا} + 48 = 0$$

−ی کو بجای لا کے رکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{ی}^5 + 7\text{ی}^4 - 15\text{ی}^3 - 3\text{ی}^2 + 4\text{ی} - 48 = 0$$

بموجب دفعہ ۹۱ کے $1 + \frac{48}{7+4}$ یعنی ۱۵ اعلی حد غائی مثبت قیمتون کی ہی اور بموجب دفعہ ۹۳ کے $\frac{48}{7+48}$ ادنی حد غائی منفی قیمتون کی ہی پس مساوات مفروضہ کی قیمت منفیہ درمیان −۵ اور $-\frac{48}{55}$ کے واقع ہونگین

(۹۵) اب ہم ایک اور ترکیب مساوات کی مثبت قیمتوں کی اعلی حد غائی کی دریافت کرنی کی لکھتی ہین اور اوسکو نیوٹن صاحب کی ترکیب کہتی ہین

فرض کرو کہ ج (لا) = ۰ مساوات کو تعبیر کرتا ہی جسپر ہم اب بحث کرتی ہین لا کی جگہہ ھ + ء لکھو اور ج (ھ + ء) کو بموجب دفعہ ۱۲ کی پہلاؤ تو مساوات کی صورت یہہ ہو جائیگی کہ

ح (ھ) + ء حَ (ھ) + ء۲/۲ حً (ھ) + ۰۰۰ + ءن/|ن ح^ن (ھ) = ۰

اب فرض کرو کہ ھ مثبت ہی اور اوسکی قیمت ایسی ہی کہ ج (ھ) اور حَ (ھ) اور حً (ھ) ۰۰ ح^ن (ھ) سب مثبت ہین تو ء کی کوئی مثبت قیمت اوپر کی مساوات کی شرائط کو پورا نہین کریگی

لیکن ء = لا − ھ چونکہ ء مثبت نہین ہو سکتا تو لا بڑا ھ سے نہین ہو سکتا پس ھ ایک اعلی حد غائی مساوات ج (لا) = ۰ کی مثبت قیمتوں کی ہی پس اگر مساوات مفروضہ اپنی سادی صورت مین ہی تو ضرور ح^ن (ھ) مثبت ہوگی اور برابر |ن ہوگی

(۹۶) مثلاً یہہ مساوات لو کہ

لا۵ + لا۴ − ۴ لا۳ − ۶ لا۲ − ۰۰۷ لا + ۰۰۵ = ۰

یہاں ح (ھ) = ھ۵ + ھ۴ − ۴ ھ۳ − ۶ ھ۲ + ۰۰۷ ھ + ۰۰۵

حَ (ھ) = ۵ ھ۴ + ۴ ھ۳ − ۱۲ ھ۲ − ۱۲ ھ + ۰۰۷

۱/۲ حً (ھ) = ۱۰ ھ۳ + ۶ ھ۲ − ۱۲ ھ − ۶

۱/|۳ حًّ (ھ) = ۱۰ ھ۲ + ۴ ھ − ۴

۱/|۴ حًًّ (ھ) = ۵ ھ + ۱

اب ہمین آسانی ہی کہ آخر جملہ ھ سی شروع کرین اور باقاعدہ اگے بڑہین کوئی سی مثبت قیمت ھ کی حًًّ (ھ) کو مثبت بناتی ہی ھ = ۱ کے حًّ (ھ) کو مثبت بناتی ہے ھ = ۲ کے حً (ھ) کو مثبت بناتی ہی اور ھ = ۴ کے حَ (ھ) کو مثبت بناتی ہے اور ھ = ۵ کے ح (ھ) کو مثبت بناتی ہی تو اسی یہہ دریافت ہوتا ہی کہ ھ = ۵

سب ھ کے جملوں کو مثبت بناتی ہی اسواسطی مساوات مفروضہ کی مثبت جملوں کی اعلی حد غائی ھ ہی
اس بات پر بھی غور کرنی چاہیئے کہ جس ترکیب کے موافق ہم آخر جملہ سی چلتی ہین اور ھ کی قیمت مناسب
اوپر کی جملوں مین بڑہاتی جاتی ہین اسمین یہہ کچھہ ضرور نہین کہ ہم نیچی کی جملوں کو جنکی علامت کا پہلی فیصلہ
ہو چکا ہی اونکو دوبارہ پہر اس قیمت ھ کی موافق جانچین مثلاً فرض کرو کہ ہم نی یہہ تحقیق کرلیا ہے کہ
ھ کی خاص قیمت ا تمام جملوں کو ح‌ً (لا) تک مثبت بناتی ہی تو ھ کی کوئی بڑی قیمت رکھو مثلاً
ا + ب تو اس سبب سے کہ

$$ح'' (ا + ب) = ح'' (ا) + ب ح''' (ا) + \frac{ب^2}{1 \times 2} ح'''' (ا) + \ldots$$

مین تمام رقمین دائین طرف مثبت بموجب فرض کی ہین تو ح‌ً (ا + ب) بہی مثبت ہی پس مثال گذشتہ
مین جب یہہ دریافت ہو گیا کہ ھ = ۵ کی ح (ھ) کو مثبت کرتا ہی تو اسکی اب ضرورت نہین رہی کہ
ہم اور جملوں کو بہی دریافت کرین کہ وہ مثبت بناتا ہی یا نہین کیونکہ اس ترکیب ہی سی ہم کو یقین ہو جاتا ہے
کہ وہ مثبت بناتا ہے

(۹۷) اب ہم نی یہہ بیان کردیا کہ مساوات کی تمام مثبت حقیقی قیمتوں کی حدود غائی کسطرح
اور مساوات کی تمام منفی حقیقی قیمتوں کی حدود غائی کیونکر دریافت کرتی ہین اب ہم بعض مسائل
لکھتی ہین جنسی کہ مقام قیمتوں کا جو مفرداً یا مجموعاً لیجائین معلوم ہوگا پوری تحقیقات اس مضمون
کی سٹرم کے ضابطہ مین آگی لکھی ہے

(۹۸) اگر ہم ج (لا) مین لا کی جگہہ متواتر دو مقدارین مندرج کرین اور ان مقداروں کے درمیان مساوات
ج ( ) = ۰ کی قیمتین جنکا شمار طاق ہو واقع ہون تو ہم کو نتایج مختلف العلامت حاصل ہونگی
اور اگر ہم ح (لا) مین لا کی جگہ متواتر دو مقدارین مندرج کرین جنکی درمیان مساوات ح (لا) = ۰
کی کوئی قیمت نہ واقع ہو اور جو واقع ہون تو اونکا شمار جفت ہو تو نتایج متحد العلامت حاصل ہونگے
فرض کرو کہ لر اور لو دو مقدارین ہون جنمین لر بڑا ہو اور ا و ب و ح ... ک تمام حقیقی قیمتین
مساوات ح (لا) = ۰ کی ہون جو درمیان لر اور لو کی واقع ہین تو بموجب دفعہ ۴۳ کی یہہ حاصل ہوگا کہ

ج(لا) = (لا - ا) (لا - ب) (لا - س) . . . (لا - ک) مر (لا)

اسمین مر لا ایک جملہ ایسا ہی جو اجزاء ضربی درجہ دوم کی حاصل ضرب سی بنا ہی جو کبھی اپنی علامت نہین بدلتی یا اصلی اجزاء ضربی سی جو اپنی علامت کبھی ایسی حالت مین نہین بدلتی کہ لا درمیان لر اور لو کے واقع ہو

لر اور لو کو بجائی لا کے متواتر رکھو تو

ج (لر) = (لر - ا) (لر - ب) (لر - س) . . . (لر - ک) مر (لر)

ح (لو) = (لو - ا) (لو - ب) (لو - س) . . . (لو - ک) مر (لو)

اب تمام اجزاء ضربی لر - ا اور لر - ب اور لر - ح . . . لر - ک مثبت ہین اور تمام اجزاء ضربی لو - ا اور لو - ب اور لو - ح . . . لو - ک منفی ہین اور مر (لر) اور مر (لو) کی ایک ہی علامت ہی اسیواسطے ح (لو) اور ح (لو) متحد العلامت ہونگے اگر ا و ب و ح . . . ک قیمتون کا شمار جفت ہوا اور مختلف العلامت ہونگی اگر قیمتون کا شمار طاق ہو

(۹۹) اسی معلوم ہوا کہ ح (لا) مین بجای لا کی دو مقدار متواتر رکھین اور اونسی نتایج مختلف العلامت پیدا ہون تو ان دو مقدارون کی درمیان مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمتین جنکا شمار طاق ہو واقع ہونگین اور اگر اونسی نتایج متحد العلامت پیدا ہون تو ان دو مقدارون کے درمیان مساوات مذکور کی کوئی قیمت نہین واقع ہوگی یا ایسی قیمتین واقع ہونگین جنکا شمار جفت ہو

اس نتیجہ کی خاص صورت دفعہ ۱۹ کا نتیجہ ہے

(۱۰۰) اس بات پر بھی خیال کرنا چاہئی کہ دفعہ ۹۸ کے اثبات مین یہ ضرور نہین ہے کہ قیمتین ا و ب و ح . . . ک سب غیر مساوی ہون اس بات کو یاد رکھنا چاہئی کہ جو قیمت م دفعہ اتی ہو اوسکو م قیمتین شمار کرتے ہین

ہم لکھہ ائی ہین کہ اگر ح (لر) اور ح (لو) متحد العلامت ہون تو مساوات ج (لا) = ۰ کی کیا تو کوئی قیمت درمیان لر اور لو کے نہین واقع ہوگی یا واقع ہونگین تو اونکا شمار جفت ہوگا

اس باب کے اوپر کی دفعات میں بعض اوقات ہم اس قسم کی دلیل کو کام میں لائی ہیں کہ لو یا کوئی اور بڑی اوسی قیمت لا کی ج (لا) کو مثبت بناتی ہی اسواسطے مساوات ج (لا) = ۰ کی مثبت قیمتوں کی اعلی حد غائی لو ہی اس بابکو خوب خیال میں رکہنا چاہیے کہ جہان ہم نی یہہ لکہا ہی کہ ج (لا) کو مثبت بناتی ہی تو اوسی مطلب ہمارا یہہ ہی کہ ج (لا) کو مثبت مقدار بناتی ہی اوسکو صفر نہیں بناتی مثلاً اگر ج (لا) = (لا-۴)^۲ (لا-۱) میں لا بڑا بہ نسبت واحد کی ہو تو ج (لا) منفی نہیں ہونے کا لیکن اسی یہہ نتیجہ نہیں نکالنا چاہئی کہ واحد اعلی حد غائی مثبت قیمتوں کی ہی اسواسطے کہ ۴ ایک قیمت موجود ہے پس اگر ہم کو صرف یہہ معلوم ہو کہ کوئی قیمت لا کی بڑی بہ نسبت لو کی ح (لا) کو منفی نہیں بنا سکتی تو اوسی یہہ نتیجہ نہیں نکالنا چاہئی کہ لو سی کوئی بڑی قیمت نہیں ہی مگر اوسی یہہ نتیجہ نکالنا چاہئی کہ کیا لو کوئی قیمت نہیں اور اگر کوئی ایک قیمت یا کئی قیمتیں ہیں تو وہ جفت مرتبہ مکرر آئی ہیں

(۱۰۱) اب ہم ایک بڑا مسئلہ یہہ لکہتی ہیں کہ مساوات ج (لا) = ۰ اور ج' (لا) = ۰ کی قیمتوں میں کیا ارتباطات ہیں یہان ج' (لا) اول جملہ مشتقہ ج (لا) کا ہی اس مسئلہ کو کبہی **رول** کا ضابطہ بہی کہتی ہیں کیونکہ سب سے پہلی اس مسئلہ کا موجد تہا

(۱۰۲) مساوات ح' (لا) = ۰ کی ایک حقیقی قیمت مساوات ح (لا) = ۰ کی دو متصل کی حقیقی قیمتوں کے درمیان واقع ہوتی ہے

فرض کرو کہ مساوات ح (لا) = ۰ کی حقیقی قیمتیں بلحاظ مقدار کی بہ ترتیب تصاعیدی جبر مقابلہ کے موافق لکہی گئی ہیں اور ا، ب، س، . . ک سی تعبیر ہوتی ہیں اور فرض کرو کہ سر (لا) حاصل ضرب بہ دوم کی اجزا ضربی کا موافق خیالی قیمتوں مساوات ج (لا) = ۰ کے ایسا ہے کہ سر (لا) اپنی علامت نہیں بدل سکتا پس بموجب دفعہ ۴۳ کے

ح (لا) = (لا - ا) (لا - ب) (لا - س) . . . (لا - ک) سر (لا)

اس مطابقہ میں لا کی جگہہ ء + ی رکہو تو

ج (ء + ی) = (ء + ی - ا) (ء + ی - ب) . . . (ء + ی - ک) سر (ء + ی)

اب فرض کرو کہ اس مسطابقہ کی ہر رکن کی صورت مفصلہ قواعد متصاعدہ مین لکھی جاوی تو مثال ہی کے
دائین طرف ح (د) ہوگا دفعہ ۱۲ کو دیکھو اور مثال ہی کی بائین طرف

[(د – ب) (د – س) . . . (د – ک) + (د – ب) (د – س) . . . (د – ک) + . .] سر (د)

+ (د – ا) (د – ب) (د – س) . . . (د – ک) سَر (د)

ہوگا ان ہی کی امثال کو برابر لکھو اور د کو لا سی بدل کر مسطابقہ مین لکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

حَ (لا) = [(لا – ب) (لا – س) . . (لا – ک) + (لا – ا) (لا – س) – (لا – ک)] سر لا

+ (لا – ا) (لا – ب) (لا – س) . . (لا – ک) سَر لا

اب متواتر ا د ب و س . . ک کو لا کی جگہ رکھو تو آخر رقم مسطابقہ کی بائین طرف کی ہر صورت مین
معدوم ہوجائیگی اور سیواسطی علامتین ح (ا) اور حَ (ب) اور حَ (س)
. . حَ (ک) کی وہی علامتین ہین جو (ا – ب) (ا – س) . . . (ا – ک) و (ب – ا) (ب – س) . . . (ب – ک)
. . . (ک – ا) (ک – ب) (ک – س) . . . اور یہہ علامتین علی التبادل مثبت اور منفی ہین
یعنی ایک مثبت دوسری منفی پہر تیسری مثبت اور چوتہی منفی او رعلی ہذا القیاس اسواسطے کہ اول جملہ کا کوئی جز ضربی
منفی نہین ہی اور دوسری جملہ کا ایک جز ضربی منفی ہی اور تیسری جملہ مین دو اجزاء ضربی منفی ہین
اور علی ہذا القیاس اسی معلوم ہوا کہ بموجب دفعہ ۹۹ کی مساوات حَ (لا) = ۰ کی قیمتین جنکا
شمار طاق ہو مساوات ج (لا) = ۰ کے متصل کی قیمتون کے درمیان واقع ہین

(۱۰۳) دفعہ گذشتہ مین قیمتین ا و ب و س . . . ک سب کے سب باہم غیر متساوی ہین اب فرض کرو
کہ قیمت ا مکرر ر دفعہ اور قیمت ب مکرر ص دفعہ اور قیمت س مکرر ط دفعہ اور علی ہذا القیاس ہو ا
تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$ج (لا) = (لا – ا)^{ر} (لا – ب)^{ص} (لا – س)^{ط} . . . سر (لا)$$

$$حَ (لا) = سر (لا) \left[ر (لا – ا)^{ر-1} (لا – ب)^{ص} (لا – س)^{ط} . . . + ص (لا – ا) (لا – ب)^{ص-1} (لا – س)^{ط} . . . + \right.$$
$$+ (لا – ط)^{ر} (لا – ب)^{ص} (لا – س)^{ط} . . . سَر (لا)$$

فرض کرو ح۱ (لا) وفق اعظم ح (لا) اور حَ (لا) کا ہی یعنی یہہ فرض کرو کہ

ح۱ (لا) = (لا − ا)^ر−۱ (لا − ب)^ص−۱ ۔ ۔ ۔ (لا − س)^ط−۱

تو حَ (لا) / ح۱ (لا) = سر (لا) [ر (لا − ب) (لا − س) ۔ ۔ ۔ + ص (لا − ا) (لا − س) ۔ ۔ ۔ + ۔ ۔ ۔

+ (لا − ا) (لا − ب) (لا − س) ۔ ۔ سرَ (لا)]

اس جملہ کو ح (لا) سے تعبیر کرو تو موافق سابق کی یہہ تحقیق ہوگا کہ مساوات جر (لا) = ۰ کی ایک قیمتین جنکا شمار طاق ہو ا اور ب کی درمیان اور دوسرے قیمتین جنکا شمار طاق ہو ب اور س کی درمیان اور علی ہذا القیاس واقع ہین اور چونکہ حَ (لا) = ح۱ (لا) ح (لا) ہم کو حاصل ہی تو جسوقت ح (لا) معدوم ہوگا تو حَ (لا) بہی معدوم ہوگا پس مساوات حَ (لا) = ۰ کی قیمتین جنکی تعداد طاق ہو مساوات ح (لا) = ۰ کی ہر دو متصل کی غیر مساوی قیمتون کی درمیان واقع ہین

مساوات ح (لا) = ۰ کی مساوی قیمتون کی نسبت ہم یہہ جانتی ہین کہ قیمت ا جو ر دفعہ مساوات ح (لا) = ۰ مین آئی ہی وہ ر − ۱ دفعہ مساوات حَ (لا) = ۰ مین اتی ہی اور علی ہذا القیاس اور قیمت ب جو ص دفعہ مکرر مساوات ح (لا) = ۰ مین آئی ہی ص − ۱ دفعہ مساوات حَ (لا) = ۰ مین مکرر آتی ہے اور علی ہذا القیاس

اسمین بڑہی آسانی ہوگی کہ ہم یون خیال کرین کہ مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمت ا کی برابر جو قیمتین ہون اوسمین ر − ۱ یون ایسی ہوتی ہین کہ اونمین سی ہر یک مین حَ (لا) = ۰ کی قیمت ا کی مکرر واقع ہوتی ہی یاد رہی کیفیت اور مکررہ قیمتون کی ہی پس اس خیال سی ہم کو یقین واثق ہو جاویگا کہ ۱۰۲ کا دعوی عام ہی خواہ مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمتین برابر ہون یا نا برابر

(۱۰۳) مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمت سی زیادہ قیمتین مساوات حَ (لا) = ۰ کی کوئی سی دو متصل کی قیمتون کے درمیان نہین واقع ہوسکتین اسواسطی کہ اگر ایک قیمت سی زیادہ قیمتین واقع ہون تو ایک قیمت بالکی قیمتین مساوات حَ (لا) کی اونکی درمیان واقع ہونگین تو مساوات حَ (لا) = ۰ کی قیمتین جو بموجب فرض کے متصلہ تہین متصلہ نہ رہین

اور ایسی ہی مساوات حَ (لا) = ۰ کی سب سی بڑی قیمت سی بڑی قیمت مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک ہی ہوسکتی ہی اور مساوات حَ (لا) = ۰ کی سب سے چھوٹی قیمت سی چھوٹی قیمتیں بہت سی ہوسکتی ہیں

(۱۰۵) اگر مساوات ح (لا) = ۰ کی سب قیمتیں حقیقی ہوں تو مساوات حَ (لا) = ۰ کی بھی سب قیمتیں حقیقی ہونگیں اسواسطی کہ دوسرے مساوات پہلی مساوات سی درجہ من ایک کم ہے اور ہر ایک قیمت دوسری مساوات کی پہلی مساوات کی دو متصل کی قیمتوں کی درمیان واقع ہی اور علی العموم اگر مساوات ح (لا) = ۰ کی م حقیقی قیمتیں ہوں تو مساوات حَ (لا) کی یقینی م - ۱ حقیقی قیمتیں ہونگیں اور اسی زیادہ بھی قیمتیں ہوسکتی ہیں

(۱۰۶) چونکہ حً (لا) اول جملہ مشتقہ حَ (لا) کا ہی تو مساوات حً (لا) = ۰ کی قیمتیں جنکا شمار طاق ہو وہ مساوات حَ (لا) = ۰ کی ہر دو متصل کی قیمتوں کی درمیان واقع ہونگیں پس اگر مساوات ح (لا) = ۰ کی م حقیقی قیمتیں ہوں تو مساوات حَ (لا) = ۰ کی کم از کم م - ۱ حقیقی قیمتیں اور مساوات حً (لا) = ۰ کی کم از کم م - ۲ حقیقی قیمتیں ہونگیں اسی طریقہ کے مراعت سی یہہ نتیجہ حصل ہوتا ہے کہ اگر مساوات ح (لا) = ۰ کی م حقیقی قیمتیں ہو تو مساوات حَ (لا) = ۰ کی کم از کم م - ر حقیقی قیمتیں ہونگیں

اسی معلوم ہوا کہ اگر مساوات حَ (لا) = ۰ کی تو خیالی قیمتیں ہوں تو مساوات ح (لا) = ۰ کی کم از کم تو خیالی قیمتیں ہونگی اسواسطی کہ اگر مساوات ح (لا) = ۰ کی تو خیالی قیمتوں سی کم قیمتیں ہوں تو اوسکی ن - لو حقیقی قیمتوں سی زیادہ قیمتیں ہونگیں ن درجے مساوات کا ہی پس مساوات حَ (لا) = ۰ کی ن - لو - ر حقیقی قیمتوں سی زیادہ قیمتیں ہونگیں اور چونکہ یہہ مساوات ن - ر درجہ کی ہے اسلئے اوسکی لو قیمتیں خیالی نہیں ہوسکتیں اور یہہ خلاف فرض کے ہے

مثلاً فرض کرو کہ ح (لا) = لاع (۱ - لا)ن

مساوات ح (لا) = ۰ کی تمام اصلی قیمتیں ہیں یعنی ن برابر صفر کے ہی یا برابر اکی ہی اسی معلوم ہوا کہ مساوات حع (لا) = ۰ کی تمام ن اصلی قیمتیں درمیان ۰ اور اکی واقع ہونگیں اور یہہ مساوات یہہ ہے کہ

$$0 = ۱ - \frac{ن}{۱} + \frac{ن(ن+۱)}{۱} لا + \frac{ن(ن-۱)}{۱×۲} \frac{(ن+۱)(ن+۲)}{۱×۲} لا^۲ - \ldots$$

(۱۰۷) اگر مساوات ح (لا) = ۰ کی تمام حقیقی قیمتین معلوم ہون تو مساوات ح (لا) = ۰ کی نسبت یہہ تحقیق کر سکتی ہین کہ اوسکی اصلی قیمتین کتنی ہین فرض کرو کہ مساوات حَ (لا) = ۰ کی قیمتین سہ و صہ و لر و ۔ ۔ ۔ کر بہ ترتیب تنازلی بلحاظ مقدار کی جبر مقابلہ مین مرتب کیجائین اور ح (لا) مین لا کی جگہہ سہ و صہ دلر ۔ ۔ کو متواتر رکہو اور جو نتایج حاصل ہون اونکی علامتون پر خیال کرو اگر نتایج مختلف العلامت ہونگی تو مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمت ان قیمتون مین سی دو متصل کی قیمتون مین واقع ہونگین اور اگر متحد العلامت ہونگی تو کوئی قیمت دو متصل کی قیمتون کے درمیان نہین واقع ہونگین دفعات ۹۸ اور ۱۰۴ کے دیکہو

مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمت بڑی جبر مقابلہ مین بہ نسبت سہ کی ہوگی اگر ح (سہ) منفی ہو اور کوئی قیمت بڑی نہ ہوگی تو ح (سہ) مثبت ہوگا اور اگر مساوات جفت درجہ کی ہو اور ح (کر) منفی ہو تو جبر مقابلہ مین مساوات کی ایک قیمت کم بہ نسبت کر کی ہوگی یا اگر مساوات طاق درجہ کی ہو اور ح (کر) مثبت ہو اور یہہ بات کسی اور طرح سی نہین ہوگی دفعات ۹۸ اور ۱۰۴ کی دیکہو

اسی معلوم ہوا کہ ح (لا) مین بجای لا کی متواتر + ∞ و سہ و صہ و لر ۔ ۔ کر و − ∞ کو رکہنی سی جو سلسلہ پیدا ہوگا اوسمین جتنی تعداد تغیرات علامت کی ہوگی اوتنی ہی مساوات ح (لا) = ۰ کی حقیقی قیمتون کا شمار ہوگا لیکن اگر ح (لا) مین ان قیمتون کی رکہنی سی ح (لا) معدوم ہو جائیگا تو اوسی یہہ دریافت ہوگا کہ مساوات ح (لا) = ۰ کی برابر قیمتین ہونگین اور تعداد اونکی باب ششم سی دریافت ہو سکتی ہے

۱) تمثیلاً اس بات کو تحقیقات کرتی ہین کہ مساوات $لا^۳$ − ن لا + ر = ۰ کی تمام قیمتون کی ممکن ہونی کی لئی کیا شرائط ہونی چاہئین

ق کو مثبت مقدار فرض کرو یہان حَ (لا) = ۳ $لا^۲$ − ق تو مساوات حَ (لا) = ۰ کی قیمتین $\pm \sqrt{\frac{ق}{۳}}$ ہین اور فرض کرو کہ سہ = + $\sqrt{\frac{ق}{۳}}$ اور صہ = − $\sqrt{\frac{ق}{۳}}$

تو　ح (سہ) = + $\left(\frac{ق}{۳}\right)^{\frac{۳}{۲}}$ − ق $\left(\frac{ق}{۳}\right)^{\frac{۱}{۲}}$ + ر = − ۲ $\left(\frac{ق}{۳}\right)^{\frac{۳}{۲}}$ + ر

ح (صہ) = - (ق/۳) ۳/۲ + ق (ق/۳) ۱/۲ + ر = ۲ (ق/۳) ۳/۲ + ر

اول فرض کرو کہ (ر/۲)۲ بڑا (ق/۳)۳ سی ہو پس اگر ر مثبت ہو تو ح (سہ) اور ح (صہ) دونو مثبت ہونگی اور مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک حقیقی قیمت ہوگی اور وہ جبر مقابلہ مین چھوٹی بہ نسبت صہ کی ہوگی اور اگر ر منفی ہو تو ح (سہ) اور ح (صہ) دونو منفی ہونگے اور مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک حقیقی قیمت ہوگی جو سہ سی بڑی ہوگی

اب فرض کرو کہ (ر/۲)۲ چھوٹا (ق/۳)۳ سی ہو تو ح (سہ) منفی ہی اور ح (صہ) مثبت ہی اور مساوات ح (لا) = ۰ مین تینون حقیقی قیمتین ہین یعنی ایک بڑی سہ سی اور ایک سہ اور صہ کے درمیان اور ایک چھوٹی صہ سی جبر مقابلہ مین

(۱۰۹) مساوات کی حقیقی قیمتوں کے مقام دریافت کرنی کی ترکیب وارنگ صاحب نی اول ایجاد کی اور لاگرانج نی اوسمین پہر دوبارہ جان ڈالی اوسکو قیمتوں کے علیحدہ کرنی کی ترکیب وارنگ صاحب کی کہتی ہین فرض کرو کہ ہم کو مساوات کی برابر قیمتین معلوم ہوگئین ہین اور ہم نی اوسکی موافق جو اجزا ضربی تہی اونکو مساوات سی خارج کر دیا ہی اور ایسی مساوات حاصل کرلی ہی کہ اوسکی قیمتین غیر مساوی ہین اور اب اسی مساوات پر بحث ہی اور اوسکو مساوات ح (لا) = ۰ سی تعبیر کرتی ہین فرض کرو کہ ک ایک مقدار ہو جو ہر دو قیمتوں کی تفاوت سی کم ہی اور ص اعلی حد غائی مثبت قیمتوں کی ہی اب ح (لا) مین بجائی لا کی ص و ص - ک و ص - ۲ ک و ص - ۳ ک . . . رکہو اور یہہ نوبت اوس مقدار تک پہونچاؤ جو الجبرا مین مساوات کی سب سے چھوٹی قیمت سی ہی چھوٹی قیمت ہو اور جو نتایج حاصل ہون اونکی سلسلہ کی علامتوں پر نظر ڈالو پس جب ایک تغیر علامت واقع ہوگا تو جو دو قیمتوں رکہنی سی یہہ تغیر پیدا ہوا ہی اونکی درمیان ایک قیمت مساوات کی ہوگی اور جب ایک تواتر علامت واقع ہوگا تو جن دو قیمتون کی رکہنی سی یہہ تواتر پیدا ہوا ہی اونکی درمیان کوئی قیمت مساوات کی نہین ہوگی

اب ہم کو اس بات پر توجہ کرنی چاہیئی کہ ک کو کسطرح تحقیق کرتی ہین فرض کرو کہ ایک مساوات ایسی بنائی گئی ہی کہ جسکی قیمتین مساوات مفروضہ کی ہر دو قیمتوں کے تفاوت کی مجذور کی برابر ہون اور اس مساوات

کی مثبت قیمتوں کی ادنی حد غائی دریافت ہوئی ہی اوسکو درسی تغیر کرو تو اعلا قیمت مناسب کی ہو گی

دفعہ ۶۰ مین ہم نی ایک مثال لکھی ہی کہ کسطرح ایک مساوات بنتی ہی کہ جسکی قیمتیں مساوات مفروضہ کے قیمتوں کے تفاوت کی مجذوروں کی برابر ہوتی ہین اور اس مثال پر کیا موقوف ہی ہم علی العموم آئندہ اوسپر بحث کرینگے وارنگ صاحب کی ترکیب ایسی پیچیدہ ہی کہ وہ تیسرے درجہ کی مساوات سی زیادہ درجہ کی مساوات مین عمل مین لانی سی کچھہ فائدہ نہین دیتی اونسی نتیجے پیچ در پیچ پیدا ہوتی ہین کہ اونکا کہولنا دشوار ہی غرض یہہ ترکیب عملیات مین تو کسی کام کی نہین مگر نظریات مین اوسسے مطلب حاصل ہو جاتا ہے

(۱۱۰) تمثیلاً وارنگ صاحب کے ترکیب کے لئی یہہ مساوات

$$\text{لا}^{3} - 3\,\text{لا}^{2} - 4\,\text{لا} + 13 = 0$$ لو

بموجب دفعہ ۶۰ کی وہ مساوات جسکی قیمتیں مساوات مفروضہ کی قیمتوں کی تفاوت کی مجذور ہوں یہہ ہے

$$\text{د}^{3} - 42\,\text{د}^{2} + 441\,\text{د} - 49 = 0$$

د کی جگہہ $\frac{1}{\text{ی}}$ رکھو تو $49\,\text{ی}^{3} - 441\,\text{ی}^{2} + 42\,\text{ی} - 1 = 0$

یعنی $49\,\text{ی}^{2}(\text{ی} - 9) + 42\left(\text{ی} - \frac{1}{42}\right) = 0$

اب ۹ اعلی حد غائی ی کی قیمتوں کی ہی اسیواسطے ادنی حد غائی $\frac{1}{9}$ ہو گی

اسی معلوم ہوا کہ $\sqrt{\frac{1}{9}}$ یعنی $\frac{1}{3}$ مساوات مفروضہ کی ہر دو قیمتوں کے تفاوت سی کم ہے

اور بموجب دفعہ ۸۷ کی مساوات مفروضہ کی مثبت قیمتوں کی اعلی حد غائی ۴ + ۱ یعنی ۵ ہی اور بموجب دفعات ۹۴ و ۹۸ کے مساوات مفروضہ کی منفی قیمتوں کی اعلی حد غائی تعداداً

$(1 + \sqrt{4})$ ہی پس مساوات مفروضہ کی تمام قیمتیں ۵ اور −۳ کے درمیان واقع ہوتی ہین

اب لا کی قیمتیں ۵ اور $5 - \frac{1}{3}$ اور $5 - \frac{2}{3}$

متواتر رکھنی سی یہہ دریافت ہو گا کہ ایک قیمت ۳ اور $2\frac{2}{3}$ کی درمیان اور ایک قیمت $2\frac{2}{3}$ اور $2\frac{1}{3}$ کی درمیان اور ایک قیمت −۲ اور $-2\frac{1}{3}$ کے درمیان واقع ہو گی

(۱۱۱) اب ہم اس باب کو ایک دعوی پر ختم کرتی ہین اور یہہ دعوی اون اصول کی ایک مثال ہی جو ابھی ہم نی ثابت کئی ہین۔

مساوات ح (لا) = ۰ مین جسمین

ح (لا) = ع. لاⁿ + ع₁ لاⁿ⁻¹ + ۰۰۰ + لا − ر

مین اگر ق کی عددی قیمت تعداداً سب سے بڑا اسر ہو اور ر مثبت اور ۱/(۲+۴ق) سی کم ہو تو ایک حقیقی قیمت ۲ ر سی چھوٹی ہو گی

جب لا صفر ہو تو ح (لا) منفی ہی تو لا کی مثبت قیمت ح (لا) کو مثبت بنائیگی اور بدرجہ اولی مثبت بنائینگے اگر وہ

لا − ر − ق (لاⁿ + لاⁿ⁻¹ + ۰۰۰ + لا۳ + لا۲)

کو مثبت بنائینگے یعنی اگر وہ لا − ر − ق لا۲ (۱ − لاⁿ⁻¹)/(۱ − لا) کو مثبت بنائینگے

اسی معلوم ہوا کہ اگر لا بہ نسبت واحد کی کم ہو اور (۱ − لا) (لا − ر) − ق لا۲ مثبت ہو تو ح (لا) بدرجۂ اولے مثبت ہو گا اب لا کی جگہہ ۲ ر اخر جملہ مین رکہو تو وہ ر [۱ − ۲ ر − ۴ ق ر] ہو جایگا اور یہہ مثبت ہی کیونکہ بموجب فرض کی ر (۲ + ۴ ق) چہوٹا بہ نسبت واحد کی ہی پس ح (لا) مثبت ہی جب لا = ۲ ر ہو اور ح (لا) منفی ہی جب لا = ۰ اسیواسطے مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمت ۰ اور ۲ ر کے درمیان واقع ہوتی ہے

اسیطرح اگر اخر رقم ر بجای − ر کے ہو اور ر مثبت ہو اور چھوٹا ۱/(۲+۴ق) سی ہو تو مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمت ۰ اور − ۲ ر کے درمیان واقع ہو گی

اٹھوان باب قیمتین محدود اور ناطق

(۱۱۲) قیمت ناطق اور محدود سی مراد اوس قیمت سی ہی جو ایک محدود صورت مین بیان ہو سکے صحیح ہو یا کسر ہو اور اوسمین مقادیر اصم نہ ہون اب ہم یہہ تبلائینگے کہ مساوات کی امثال جب اعداد ناطق ہون خواہ صحیح یا کسر تو ناطق اور محدود قیمتین مساوات کی اسانی سی دریافت ہو سکتی ہین

دفعہ ۵۳ مین ہم نی بیان کیا ہی کہ اگر مساوات کی امثال ناطقہ ہون اور سب صحیح نہ ہون تو اوس مساوات کی ہیئت بدل کر ایک ایسی مساوات بنا سکتی ہین کہ جسکی سب امثال صحیح ہون

اور مثال اول رقم کا واحد ہو اسواسطی ہم اب اس اخر الذکر مساوات پر بحث کرینگے اور اول ہم بتلاوینگے کہ مساوات مین اوس صورت کی قیمتین کسور ناطقہ نہین ہوینگی

(۱۱۳) اگر مساوات کی مثال تمام اعداد صحیح ہون اور اوسکی اول رقم کا مثال واحد ہو تو مساوات کی کوئی قیمت کسور ناطقہ نہین ہوسکتی

فرض کرو کہ مساوات

$$لا^{ن} + ع_{۱} لا^{ن-۱} + ع_{۲} لا^{ن-۲} \ldots + ع_{ن-۲} لا^{۲} + ع_{ن-۱} لا + ع_{ن} = ۰$$

اور اگر یہہ ممکن ہو تو فرض کرو کہ قیمت کسور ناطقہ مختصر الحدین $\frac{ا}{ب}$ ہی اور اسکو لا کی جگہ مساوات مین رکھو اور سب کو $ب^{ن-۱}$ مین ضرب دو تو

$$\frac{ا^{ن}}{ب} + ع_{۱} ا^{ن-۱} + ع_{۲} ا^{ن-۲} ب + \ldots + ع_{ن-۲} ا^{۲} ب^{ن-۳} + ع_{ن-۱} ا ب^{ن-۲} + ع_{ن} ب^{ن-۱} = ۰$$

اور اسیواسطے $- \frac{ا^{ن}}{ب} = ع_{۱} ا^{ن-۱} + ع_{۲} ا^{ن-۲} ب + \ldots + ع_{ن-۲} ا^{۲} ب^{ن-۳} + ع_{ن-۱} ا ب^{ن-۲} + ع_{ن} ب^{ن-۱}$

اب اخر نتیجہ ناممکن ہی اسواسطے کہ بائین طرف کا رکن تو صحیح مقدار ہی اور دائین طرف کا رکن صحیح مقدار نہین ہے اسواسطے مساوات مفروضہ کی قیمت کسر نہین ہوسکتی

(۱۱۴) اسی معلوم ہوا کہ فقط ہم کو تحقیقات اون قیمتون کی کرنی چاہی جو محدد اور ناطقہ اور صحیح ہو اور اب ہم ترکیب اونکی دریافت کرنی کی بیان کرتی ہین اس ترکیب بعض اوقات ترکیب مقسوم علیہون کی کہتی ہین اور بعض اوقات اوسکو نیوٹن صاحب کی ترکیب کہتی ہین

فرض کرو کہ مساوات

$$لا^{ن} + ع_{۱} لا^{ن-۱} + ع_{۲} لا^{ن-۲} \ldots + ع_{ن-۲} لا^{۲} + ع_{ن-۱} لا + ع_{ن} = ۰$$ ہو

اور ا ایک صحیح قیمت ہی اس قیمت کی مندرج کرنی سی اور ارقام کو بہ ترتیب معکوس لکھنی سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$ع_{ن} + ع_{ن-۱} ا + ع_{ن-۲} ا^{۲} + \ldots + ع_{۲} ا^{ن-۲} + ع_{۱} ا^{ن-۱} + ا^{ن} = ۰$$

اسواسطے ا پر تقسیم کرنے سے

$$\frac{ع_ن}{ا} + ع_{ن-۱} + ع_{ن-۲}\,ا + \cdots + ع_۲\,ا^{ن-۳} + ع_۱\,ا^{ن-۲} + ا^{ن-۱} = ۰$$

اسی معلوم ہوا کہ $\frac{ع_ن}{ا}$ ایک صحیح عدد ہوا اسکو ق سی تعبیر کرو اور اسکو ا پر تقسیم کرو تو

$$\frac{ق_۱ + ع_{ن-۱}}{ا} + ع_{ن-۲} + \cdots + ع_۲\,ا^{ن-۴} + ع_۱\,ا^{ن-۳} + ا^{ن-۲} = ۰$$

اسی معلوم ہوا کہ $\frac{ق_۱ + ع_{ن-۱}}{ا}$ ایک صحیح عدد ہونا چاہئی اسکو ق$_۲$ سی تعبیر کرو اور پھر ا پر تقسیم کرو تو $\frac{ق_۲ + ع_{ن-۲}}{ا}$ ایک صحیح عدد ہونا چاہئی اسیطرح عمل کرنی سی ا پر ن دفعہ تقسیم کرنی سے اس نتیجہ پر نوبت پہونچیگی کہ $\frac{ق_{ن-۱} + ع_۱}{ا} + ۱ = ۰$

اسی معلوم ہوتا ہی کہ مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمت ا کی ہونی کی واسطی یہہ شرائط ضرور ہین کہ اخر رقم مساوات کی ا پر پوری تقسیم ہوتی ہو اور خارج قسمت پر جو اسطرح حاصل ہوا گر لا کا امثال زیادہ کیا جاے تو حاصل جمع بہی ا پر پورا تقسیم ہو اور اسطرح جو خارج قسمت حاصل ہوا ور لا^۲ کا سر جو مساوات مین ہے زیادہ کرین تو حاصل جمع ایسا حاصل ہو کہ وہ ا پر پورا تقسیم ہو اور اسیطرح عمل کئی جائیں جب تک کہ ن - ا تقسیمون پر نوبت پہونچی اور خارج قسمت جو حاصل ہو اوسپر لا$^{ن-۱}$ کا سر زیادہ کرو تو حاصل جمع پورا ا پر تقسیم ہو اور خارج قسمت - ۱ ہو

اگر ان تمام مراتب مین سی کسی مرتبہ پر شرط مطلوب ٹوٹ جاے تو جان لینا چاہئی کہ صحیح عدد ا قیمت مساوات کی نہین ہی

(۱۱۵) ہم نی دفعہ گذشتہ مین اون شرائط کو دریافت کیا ہی کہ جنکی موافق صحیح عدد ا مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمت بنتا ہی اب یہہ بات اسانی سی دریافت ہوتی ہی کہ اگر ان شرائط مین سی اخر شرط پوری ہو تو صحیح عدد ا قیمت مساوات کی ہوگا اسواسطے کہ اخر شرط اسطرح تعبیر ہوتی ہے

$$\frac{ع_ن}{ا^ن} + \frac{ع_{ن-۱}}{ا^{ن-۱}} + \frac{ع_{ن-۲}}{ا^{ن-۲}} + \cdots + \frac{ع_۲}{ا^۲} + \frac{ع_۱}{ا} = -۱$$

اب اگر یہہ صحیح ہو تو ا^ن مین ضرب دینی سی مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمت ا کا ہونا ظاہر ہے مساوات کی تمام محدود اور ناطق قیمتوں کی دریافت کرنی کی واسطی اخر رقم کے تمام پوری بانٹنی والی مقدارین دریافت کرین اور اس بات کو جانچین کہ وہ شرائط دفعہ ۱۱۴ کو پورا کرتی

ہین ۔ اس امتحان کی محنت کم ہوجائیگی اگر ہم اول مثبت اور منفی قیمتون کی حد غائی دریافت کرین ان حدود غائی کی دریافت کرنی سی اون صحاح پر ازمالیش کی ضرورت نہین رہیگی جو ان حدود غائی سی باہر ہون فقط اونہین اعداد کی ازمایش کرنی پڑیگی جو ان حدود غائی کی درمیان واقع ہونگی

(۱۱۶) تمثیلاً اس مساوات کو لوکہ

$$لا^{۵} + ۵ لا^{۴} + لا^{۳} - ۱۶ لا^{۲} - ۲۰ لا - ۱۶ = ۰$$

یہان بموجب دفعہ ۸۹ کی $۱ + \sqrt[۳]{۲۰}$ اعلی حد غائی ہی اور لا کی جگہہ د لکھنی سی یہہ مساوات حاصل ہوتی ہے

$$د^{۴}(د - ۵) + د^{۳} + ۱۶ د (د - \frac{۵}{۴}) + ۱۶ = ۰$$

اسمین ۵ اعلی حد غائی مثبت قیمتون کی ہی اسی معلوم ہوا کہ تمام مثبت قیمتین مساوات کی ۱۴ اور −۵ کی درمیان واقع ہوتی ہین اور −۱۶ کی پوری بانٹنی والی صحاح ان حدود غائی کی درمیان جو واقع ہین اب ان اعداد کا امتحان کرتی ہین کہ کونسی اونمین سی قیمتین ہین

۴	۲	۱	−۱	−۲	−۴
−۴	−۸	−۱۶	+۱۶	+۸	+۴
−۲۴	−۲۸	−۳۶	−۴	−۱۲	−۱۶
−۶	−۱۴	−۳۶	+۴	+۶	+۴
−۲۲	−۳۰	−۵۲	−۱۲	−۱۰	−۱۲
	−۱۵	−۵۲	+۱۲	+۵	+۳
	−۱۴	−۵۱	+۱۳	+۶	+۴
	−۷	−۵۱	−۱۳	−۳	−۱
	−۲	−۴۶	−۸	+۲	+۴
	−۱	−۴۶	+۸	−۱	−۱

اول سطر مین وہ پوری بانٹنی والی اخر رقم کی لکھی ہین جنکا امتحان منظور ہے اور ہر یک بانٹنی والی کی نیچی وہ نتایج لکھی ہین جو اوسکی امتحان سے پیدا ہوتی ہین مثلاً پورا بانٹنی والا ۴ ہے اخر رقم −۱۶ کو ۴ پر تقسیم کرتی ہین اور خارج قسمت −۴ کو اوسکی نیچی لکھتی ہین اب اسکو لا کی سر −۲۰ سے زیادہ کرتی ہین اور حاصل جمع −۲۴ کو نیچی لکھتی ہین اب اسکو ۴ پر تقسیم کرنی سی −۶ خارج قسمت نکلتا ہے

اسلوبحی لکھتی ہین اور سبر سرلا کا ۔۱۶ زیادہ کرتی ہین تو ۔۲۲ حاصل ہوتی اور یہہ ۴ پر تقسیم نہین ہوتا اسی معلوم ہوا کہ ۴ قیمت نہین ہے ۲ اور ۔۲ اور ۔۴ کی موافق تمام شرائط پوری ہوتی ہین اسلئی یہی اعداد قیمتین مساوات کی ہین اور ۱ اور ۔۱ اسسبب سی پہلی شرط کو پورا نہین کرتے یعنی اخر خارج قسمت ۔۱ نہین ہی اسواسطی یہہ اعداد قیمتین نہین ہین

پس مساوات مفروضہ کو ح (لا) = سی تعبیر کرین تو یہہ دریافت ہوگا کہ (لا ۔ ۲) (لا + ۲) (لا + ۴) ایک جزضربی ح (لا) کا ہی اور اسی یہہ معلوم ہوگا کہ دوسرا جزضربی $لا^2$ + لا + ۱ ہے

(۱۱۷) اکثر + ۱ اور ۔۱ کو پوری باطنی والون مین نہین امتحان کرتے کیونکہ اونکا یہہ امتحان کرنا کہ وہ قیمتین ہین یا نہین اسطرح اسان ہی کہ اونکو لا کی جگہہ مساوات معلوم مین رکہکر دیکہہ لین اگر کوئی قوت لا کی مساوات مفروضہ مین سی مفقود ہو تو اوسکی جگہہ اوسی قوت کو لکہو اور صفر اوسکا سر بناؤ دفعہ ۱۰۵ دیکھو

جب اس ترکیب سے خاص اعداد ا و ب و س ... محدود اور ناطق قیمتین مساوات ح (لا) = ۰ کی ہون تو یہہ تحقیق کرنا باقی رہا ہی کہ یہہ قیمتین مکرر اتی ہین ح (لا) کو حاصل ضرب (لا ۔ ا) (لا ۔ ب) (لا ۔ س) ..... پر تقسیم کرین اور اس خارج قسمت کو سر (لا) سی تعبیر کرتی ہین اور پہر مساوات سر (لا) = ۰ پر اس ترکیب کو عمل مین لائین اسی طریقہ کے مراعت سی مساوات ح (لا) = ۰ کی مکرر قیمتین دریافت ہوسکتی ہین اور یہہ معلوم ہوسکتا ہی کہ ہر ایک قیمت مکرر کتنی دفعہ اتی ہے

ح (لا) = ۰ کی مساوی قیمتون کی ازمایش باب چہارم سے ہوسکتی ہے

(۱۱۸) دفعہ ۱۱۴ مین جو مساوات لی گئی ہی اوسکی اول رقم کا سر واحد ہے اگر اس مساوات کی جگہہ ایسی مساوات لین کہ جسمین کوئی سر صحیح ع اول رقم کا ہو تو شرائط متحصلہ مین فقط اخر خارج قسمت مین یہہ فرق پڑیگا کہ ۔۱ کی جگہہ ۔ع حاصل ہوگا مثلاً فرض کرو کہ

$$۴ لا^۳ ۔ ۱۲ لا^۲ + ۱۳ لا ۔ ۱۵ = ۰$$

یہان $\frac{۱۵}{۴}$ + ۱ اعلی حد نہائی مثبت قیمتون کی بموجب دفعہ ۹۰ کی اور بموجب دفعہ ۲۴ کی کوئی منفی قیمت نہین ہے

اور امتحان کرنی سی معلوم ہوتا ہی کہ ۱ قیمت نہین ہی پس اخر رقم کی پوری بانٹنی والی ۵ اور ۳ ہین تو اونکی ترتیب یہہ ہوگی کہ

۵	۳
۳-	۵-
۱۰	۸
۲	
۱۰-	
۲-	

پس ۵ قیمت ہی اسواسطے کہ اوسی تمام شرائط پوری ہوتی ہین آخر خارج قسمت ۲- ہے اور ۳ قیمت نہین کیونکہ ۸ پورا ۳ پر تقسیم نہین ہوتا

(۱۱۹) اخر رقم کی پوری بانٹنی والون کا شمار اصول مفصلہ ذیل کی موافق بہی ہو سکتا ہے فرض کرو کہ مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمت ا ہو لا کی جگہ م + ر رکہو تو ا - م ایک قیمت ر کی ایسی ہوگی جو مساوات ح (م + ر) = ۰ کی شرائط کو پورا کریگی جو رقم ر سے کچہہ لگاؤ نہین رکہتی وہ ح (م) ہی اور تمام امثال ر کی صحیح ہین اگر ح (لا) کی سب امثال صحیح ہون اور م بہی صحیح ہو دفعہ ۱۲ کو دیکہو پس اگر ا صحیح ہو تو ا - م بہی صحیح ہوگا اور اسواسطی ح (م) کو بموجب دفعہ ۱۱۴ کی تقسیم کریگا پس کوئی صحیح مقدار ا جو اخر رقم ح (لا) کو پورا بانٹتی ہو اور ح (م) کو ا - م نہ پورا تقسیم کرتی ہو تو وہ مقدار خارج از امتحان ہو سکتی ہے

یہان م کوئی صحیح منفی اور مثبت ہو سکتا ہی - +۱ اور -۱ قیمتین اوسکی مقرر کرنی سی ح (م) ... اب مین بڑی اسانی ہو جاتی ہے

دفعہ ۱۱۶ کی مساوات معلوم کو تمثیلاً لو یہان ۴ اخر رقم کو پورا بانٹتا ہے لیکن ۴ + ۱ پورا ح (-۱) کو جو ۹ ہی نہین تقسیم کرتا ہی اسلئی یہہ قیمت مساوات کی نہین ہو سکتی

اب یہہ مثال $لا^۳ - ۲۰ لا^۲ + ۱۶۴ لا - ۴۰۰ = ۰$ کی کوئی اس مساوات کی منفی قیمت بموجب دفعہ ۲۴ کی نہین ہی اور اوسکو اس صورت $لا^۲ (لا - ۲۰) + ۱۶۴ (لا - \frac{۱۰۰}{۴۱})$ مین لکہنی سے

ہم دیکھتی ہیں کہ ۲۰ اعلی حد عائی مثبت قیمتوں کی ہی اخر رقم کی مثبت پوری بانٹنی والے جو ۲۰ سے کم ہوں ۲ و ۴ و ۵ و ۸ و ۱۰ و ۱۱ اور ۱۶ ہیں انہیں سی ۵ و ۸ و ۱۰ قیمتیں نہیں ہیں اسلیئے کہ ح (۱) = −۵۵ ۲ اور یہہ ۵ − ۱ یا ۸ − ۱ یا ۱۰ − ۱ پر پورا نہیں تقسیم ہوتا

پس اخر رقم کی پورا بانٹنی والی امتحان کے واسطی ۲ و ۴ اور ۱۶ ہیں انہیں سی معلوم ہوگا کہ ۴ قیمت ہے

(۱۲۰) ایک مثال قیمت مکسور ناطق کی یہہ مساوات ۴ لا۴ − ۱۱ لا۲ + ۷ لا − ۶ = ۰ ہے یعنی

لا۴ − ۱۱/۴ لا۲ + ۷/۴ لا − ۳/۲ = ۰

اول مساوات میں لا = ی/۲ کے رکھو تاکہ مساوات مثبت بدل کر ایسی ہو جاے کہ تمام مثال صحیح ہوں دفعہ ۵۳ کو دیکھو پس

ی۴ − ۱۱ ی۲ + ۱۴ ی − ۲۴ = ۰

یعنی ی۴ + ۰ × ی۳ − ۱۱ ی۲ + ۱۴ ی − ۲۴ = ۰

بموجب دفعات ۹۰ اور ۹۴ کے تمام قیمتیں اس مساوات کی درمیان ۱ + √۲۴ اور −(۱ + √۲۴)

واقع ہوں اور ہم امتحان سی دریافت کرتی ہیں کہ + ۱ اور − ۱ قیمتیں ہیں پس صرف پوری تقسیم کرنی والی اخر رقم کی ۴ و ۳ و ۲ و −۲ و −۳ و −۴ ہیں اور نیز ح (۱) = −۲۰ اور یہہ

۴ − ۱ یا −۲ − ۱ اسپر پوری نہیں تقسیم ہوتی ہی معلوم ہوا کہ ۴ اور −۲ خارج الامتحان ہیں

اور موافق سابق کی ترتیب عمل کی یہہ ہوگی

−۴	−۳	۲	۳
۶	۸	−۱۲	−۸
−۲۰	۲۲	۲	۹
−۵		۱	۶
−۱۶		−۱۰	−۹
۴		−۵	−۳
−۱			−۱

پس ۳ اور −۴ قیمتیں ہیں اور چونکہ لا = ی/۲ تو ۳/۲ اور −۲ قیمتیں اصلی مساوات کی حاصل ہوئیں

نوان باب تنزل معادلات

اس باب مین ہم اس بات کی تحقیقات کرینگی کہ کسطرح سی ایک مساوات کا حل اوسی کم درجہ کی مساوات کے حل پر بعض صورتون مین موقوف ہوسکتا ہی جبکہ اونکی قیمتون کی ارتباط معلوم ہون جس عمل سے یہہ امر دریافت ہوتا ہی اوسکو تنزل معادلات کہتی ہین

(۱۲۲) جب دو مساواتون مین ایک قیمت یا کئی قیمتیں مشترک ہون تو اوس قیمت یا قیمتون کو دریافت کرو فرض کرو کہ ح (لا) = ۰ اور مح (لا) = ۰ مساواتین ہین جنکی ایک قیمت مشترک ا ہے پس ح (لا) اور مح (لا) مین لا - ا ایک جز ضربی مشترک ہوگا اہی معلوم ہوا کہ ح (لا) اور مح (لا) کی وفق مشترک اعظم مین لا - ا ایک جز ضربی ہوگا اور علی ہذا القیاس ہر ایک جز ضربی مشترک ح (لا) اور مح (لا) کا وفق مشترک اعظم کا ہی جز ضربی ہوگا اور کوئی اور جز ضربی اس وفق اعظم مین نہین واقع ہوگا پس اہی معلوم ہوا کہ اگر ہم ح (لا) اور مح (لا) کا وفق اعظم دریافت کرین اور اوسکو برابر صفر کے لکھہ دین تو اوس مساوات کی قیمتین مطالقت نامہ معادلات ح (لا) = ۰ اور مح (لا) = ۰ کے مشترک قیمتون سے ہو نگے

اگر ح (لا) اور مح (لا) مین کوئی جز ضربی مکرر آتا ہی تو وفق اعظم میں بہی مکرر آیگا

(۱۲۳) تمثیلاً فرض کرو کہ یہہ دو مساواتین ہین

$$لا^4 + 3 لا^3 - 5 لا^2 - 6 لا - 8 = 0$$

$$\text{اور}\quad لا^4 + لا^3 - 9 لا^2 + 10 لا - 8 = 0$$

ان مساواتون کی دائین طرف کی ارکان کا وفق اعظم $لا^2 + 2 لا - 8$ ہی اور اگر اسکو برابر صفر کے لکھین تو لا = -۴ اور لا = ۲ کی حاصل ہوگا

پس دونو مساواتون کی مشترک قیمتین ۲ اور -۴ ہین

(۱۲۴) فرض کرو کہ مساوات ح (لا) = ۰ کی دو قیمتین ا اور ب ہین جنکا ربط باہمی ہم کو یہہ معلوم ہے کہ ع ا + ق ب = ر اب مطلوب یہہ ہی کہ ان قیمتون کو دریافت کرین

چونکہ مساوات ح (لا) = ۰ کی ا اور ب قیمتین ہین تو ح (ا) = ۰ اور ح (ب) = ۰
لیکن ب = $\frac{ر - ع ا}{ق}$ اسیواسطے ح $\left(\frac{ر - ع ا}{ق}\right)$ = ۰
پس معادلات ح (لا) = ۰ اور ح $\left(\frac{ر - ع لا}{ق}\right)$ = ۰ کی مشترک قیمت ا ہے
تو وہ بموجب دفعہ گذشتہ کی دریافت ہوسکتی ہی پس اسطرح تو ا دریافت ہوگیا اور اس ارتباط
ع ا + ق ب = ر سی ب دریافت ہوجایگا اسی معلوم ہوتا ہی کہ حاصل ضرب اجزاء ضربی
لا − ا اور لا − ب پر ح (لا) پورا تقسیم ہوجایگا اور خارج قسمت کو برابر صفر کی لکھین تو ایک
مساوات ایسی حاصل ہوجائیگی کہ اوسی باقی قیمتین مساوات ح (لا) = ۰ کی دریافت ہوجائینگین

(۱۲۵) تمثیلاً فرض کرو کہ یہہ مساوات ہو

$$لا^{۴} - ۷ لا^{۳} + ۱۱ لا^{۲} - ۷ لا + ۱۰ = ۰ \quad (۱)$$

اور یہہ ہم کو معلوم ہی کہ اوسکی دو قیمتین ا اور ب مین ارتباط باہمی یہہ ہی کہ ب = ۲ ا + ۱
مساوات (۱) مین لا کی جگہہ ۲ لا + ۱ رکھو تو

$$(۲لا + ۱)^{۴} - ۷ (۲لا + ۱)^{۳} + ۱۱ (۲لا + ۱)^{۲} - ۷ (۲لا + ۱) + ۱۰ = ۰$$

یعنی $۱۶ لا^{۴} - ۲۴ لا^{۳} - ۱۶ لا^{۲} - ۴ لا + ۸ = ۰$

$$۴ لا^{۴} - ۶ لا^{۳} - ۴ لا^{۲} - لا + ۲ = ۰ \quad (۲)$$

اب معادلات (۱) اور (۲) کی بائین طرف کی ارکان کا دفق اعظم لا − ۲ ہے پس ا = ۲
اور اسیواسطے ب = ۵ یعنی مساوات مفروضہ کے دو قیمتین ۲ اور ۵ ہین تو اسی یہہ دریافت ہوگا کہ

$$لا^{۴} - ۷ لا^{۳} + ۱۱ لا^{۲} - ۷ لا + ۱۰ = (لا - ۲)(لا - ۵)(لا^{۲} + ۱)$$

پس اور قیمتین $\pm \sqrt{(-۱)}$ ہین

(۱۲۶) یہہ ہوسکتا ہی کہ ایک اور زوج قیمتون کا سہ اور سہ' مین یہہ ارتباط ہو کہ ع سہ + ق سہ' = ر
تو اس صورت مین جبکہ ح (لا) اور ح $\left(\frac{ر - ع لا}{ق}\right)$ کی دفق اعظم مین لا کی دوسرے درجہ کا جملہ کا جسمین
اجزاء ضربی لا − ا اور لا − سہ ملتف ہونگی اگر قیمتین ا اور ب دونو مساوات ح (لا) = ۰

مین مکرر آئینگی تو ح (لا) اور ح (ــــــ) دفق اعظم مین جز ضربی لا - ا مکرر آئیگا

(۱۲۷) علی العموم یہہ فرض کرو کہ مساوات ج (لا) = ۰ کی دو قیمتین ا اور ب مین باہمی ارتباط یہہ ہی کہ ب = سر(ا) تو معادلات ح (لا) = ۰ اور ح [سر(لا)] = ۰ کی ایک قیمت مشترک ا ہوگی اور اس مشترک قیمت کو بموجب دفعہ ۱۲۲ کے دریافت کرسکتی ہین

(۱۲۸) ایک صورت ایسی بہی ہی کہ اوسمین دفعات ۱۲۴ اور ۱۲۶ کی کچہ امداد مساوات مفروضہ کی حل کرنی مین نہین کرتین مثلاً مساوات ح (لا) = ۰ ہو اور یہہ ہم کو معلوم ہی کہ اوسکی قیمتون کی زوج واقع ہوتے ہین اور ہر یک زوج ا اور ب قیمتون کا اس ارتباط ا + ب = ۲ ر کی شرائط کو پورا کرتا ہے تو بموجب دفعہ ۱۲۴ کے ہم معادلات ح (لا) = ۰ اور ح (۲ ر - لا) = ۰ کی مشترک قیمتین دریافت کرینگے مگر ان قیمتون مین بالکل تطابق ہوگا اسواسطی کہ بموجب فرض کے ح (ا) = ۰ یعنی ح (۲ ر - ب) = ۰ اور ح (ب) = ۰ یعنی ح (۲ ر - ا) = ۰

پس قیمتین ا اور ب دونو مشترک دونو مساواتون مین ہین اور علی ہذا القیاس اور زوج قیمتون کے مشترک دونو مساواتون مین ہین اسواسطی دونو مساواتون مین تطبیق تامہ ہوگی

(۱۲۹) جس مساوات پر دفعہ بالا مین بحث ہوئی ہی اوسکی تنزل کی بہت طریقی ہین مگر ہم اونمین صرف دو لکہتی ہین تاکہ طالب علمون کو اس بات کی مضمون مین مشق ہو جاے

اول ہم عمل اسطرح کرتی ہین کہ فرض کرو ا - ب = ۲ ی تو ہم کو ایک ساتہہ ہی یہہ مساواتین حاصل ہونگین

ح (ا) = ۰ ا + ب = ۲ ر ا - ب = ۲ ی

ان مساواتون مین سی دوسری تیسری مساوات سی ا = ی + ر اس قیمت کو مساوات اول مین رکہو تو ح (ی + ر) = ۰ اس مساوات سی قیمتین ی کی دریافت ہوسکتی ہین اور پہر ان قیمتون کی مطابق ا اور ب کی قیمتین بہی دریافت ہوجائینگی اب یہہ بات آسان ہی کہ مساوات ح (ر + ی) = ۰ مین ہم یہہ ثابت کردین کہ اوسمین ی کی جفت قوا ہین پس اگر ہم ی^۲ کو مقدار مجہول خیال کرین تو اس مساوات کا درجہ مساوات مفروضہ کی درجہ سی نصف ہوگا

فرض کرو کہ مساوات مفروضہ کا ایک زوج قیمتون کا ا اور ب ہی اور دوسرا زوج سہ اور صہ ہی تو

ح (لا) = (لا − ا) (لا − ب) (لا − سہ) (لا − صہ) . . .

ح (ی + ر) = (ی + ر − ا) (ی + ر − ب) (ی + ر − سہ) (ی + ر − صہ) . . .

= (ی + (ا + ب)/۲ − ا) (ی + (ا + ب)/۲ − ب) (ی + (سہ + صہ)/۲ − سہ) (ی + (سہ + صہ)/۲ − صہ) . . .

= [ی^۲ − ((ا − ب)/۲)^۲] [ی^۲ − ((سہ − صہ)/۲)^۲] . . . . . .

یعنی ح (ی + ر) مین صرف ی کی جفت قوا ہین

درحقیقت اس مسئلہ مین کچھ تمیز قیمتون ا اور ب کی درمیان نہین کی گئی اسلئی جو مساوات ایسی بنائی جاتی کہ اوسکی قیمت (ا − ب)/۲ ہو تو ضرور ہم کو یہہ توقع ہوسکتی ہی کہ (ب − ا)/۲ بہی اوسکی قیمت ہوگی اور نفس الامر مین بہی یہی بات ظاہر

دوم اسطرح بہی عمل کرتی ہین کہ ی = اب کے فرض کرین تو

(لا − ا) (لا − ب) = لا^۲ − (ا + ب) لا + اب = لا^۲ − ۲ ر لا + ی

اگر ی کی مناسب قیمت فرض کرین تو لا^۲ − ۲ ر لا + ی ایک جزضربی ح (لا) کا ہوگا ح (لا) کا لا^۲ − ۲ ر لا + ی پر تقسیم کی جاؤ جب تک کہ باقی کی صورت ع لا + ق پیدا ہو اسمین ع اور ق جملی ی کی ہین اور اونمین لا شامل نہین ہی اسی معلوم ہوا کہ ضروری شرط اس امر کی کہ ح (لا) کا جزضربی لا^۲ − ۲ ر لا + ی ہی سہ ہی کہ ع = ۰ اور ق = ۰

بموجب دفعہ ۱۲۲ کی ی کی قیمت ایسی دریافت کرو کہ وہ دونو مساواتون کی شرائط کو پورا کرے اور پہر ا اور ب کو ان مساواتون

ا + ب = ۲ ر ی = اب

سے دریافت کرو

(۱۳۰) فرض کرو کہ مساوات ح (لا) = ۰ کی تین قیمتین ا اور ب اور س کا یہہ ارتباط باہمی معلوم ہی کہ ع ا + ق ب + ر س = ص اب مطلوب یہہ ہی کہ ان قیمتون کو دریافت کرین چونکہ ا اور ب اور س مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمتین ہین تو ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

ح (ا) =۰ ح (ب) =۰ ح (س) =۰ بس

ح (ا) =۰ ح (ب) =۰ ح ((ص - ع ا - ن ب) / ...) =۰

اب آخر دو مساواتون سی ب کو دور کرو تو ایک یہہ مساوات ہم کو حاصل ہوگی کہ سر (ا) =۰

پس مساوات ح (لا) =۰ اور سر (لا) =۰ کی ایک مشترک قیمت ا ہے اور یہہ بموجب

دفعہ ۱۲۲ کے دریافت ہوسکتا ہے

(۱۳۱) اس باب کی مضمون سی متعلق چند مثالین اب ہم لکھتی ہین

(۱) اس مساوات

$$لا^{ن} + ع_{۱} لا^{ن-۱} + ع_{۲} لا^{ن-۲} + \dots + ع_{ن} = ۰$$

کی قیمتین سلسلہ حسابیہ مین ہین اونکو دریافت کرو

ان قیمتون کو ا و ا + ب و ا + ۲ب . . . سے تعبیر کرو

تو بموجب دفعہ ۷۴ کے

$$- ع_{۱} = ا + (ا + ب) + (ا + ۲ب) + \dots + (ا + \overline{ن-۱} ب)$$

$$ع_{۱}^{۲} - ۲ ع_{۲} = ا^{۲} + (ا + ب)^{۲} + (ا + ۲ب)^{۲} + \dots (ا + \overline{ن-۱} ب)^{۲}$$

یعنی $- ع_{۱} = ن ا + \frac{ن (ن - ۱)}{۲} ب$

$$ع_{۱}^{۲} - ۲ ع_{۲} = ن ا^{۲} + ن (ن - ۱) ا ب + \frac{ن (ن - ۱) (۲ن - ۱)}{۶} ب^{۲}$$

بیسوان باب الجبرا کا دیکھو

ن ماحصل کے مجذور مین سی دوسرے ماحصل کے ن گنی کو تفریق کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$(ن - ۱) ع_{۱}^{۲} - ۲ ن ع_{۲} = \frac{ن^{۲} (ن^{۲} - ۱) ب^{۲}}{۱۲}$$

پس ب اسی دریافت ہوگیا اور ب کی معلوم ہونی سی ا معلوم ہوجایگا

(۲) مساوات $لا^{۴} + ۳ لا^{۳} - ۱۲ لا^{۲} - ۸۴ لا - ۴۴ = ۰$ کی دو قیمتین ہین جو مقدار مین مساوی ہین

اور اونکی علامتین مختلف ہین اونکو دریافت کرو یہان اگر لا کی علامت بدل دین تو مساوات

ایسی حاصل ہوگی جسکی اور مساوات مفروضہ کی ایک قیمت مشترک دونوں مین ہوگی یعنی مساوات مفروضہ اور اس مساوات

$$\text{لا}^{4} - 3\,\text{لا}^{3} - 12\,\text{لا}^{2} + 48\,\text{لا} - 64 = 0$$

کی ایک قیمت مشترک ہی پس بموجب دفعہ ۱۲۲ کی ان دونون مساواتون کے بائین طرف کی ارکان کا دفق اعظم دریافت کرین یا دونو مساواتون کو تفریق کرین تو

$$6\,\text{لا}^{3} - 96\,\text{لا} = 0$$

اسواسطی $\text{لا} = 0$ یا $\text{لا}^{2} = 16$

پہلی سی کوئی قیمت نہین حاصل ہوتی اور دوسری سے $\text{لا} = \pm 4$ حاصل ہوتا ہی اور $+4$ اور -4 مساوات مفروضہ کی قیمتین ہین

(۳) مساوات $3\,\text{لا}^{4} - 19\,\text{لا}^{3} + 9\,\text{لا}^{2} - 19\,\text{لا} + 6 = 0$ کی دو قیمتین ہین جنکا حاصل ضرب ۲ ہی اونکو دریافت کرو

فرض کرو کہ د ایک قیمت ہی تو $\frac{2}{\text{د}}$ دوسری قیمت ہوگی اسی معلوم ہوا کہ

$$3\,\text{د}^{4} - 19\,\text{د}^{3} + 9\,\text{د}^{2} - 19\,\text{د} + 6 = 0 \qquad (1)$$

اور $3\left(\frac{2}{\text{د}}\right)^{4} - 19\left(\frac{2}{\text{د}}\right)^{3} + 9\left(\frac{2}{\text{د}}\right)^{2} - 19\left(\frac{2}{\text{د}}\right) + 6 = 0$

یعنی $6\,\text{د}^{4} - 38\,\text{د}^{3} + 36\,\text{د}^{2} - 152\,\text{د} + 48 = 0$

یا $3\,\text{د}^{4} - 19\,\text{د}^{3} + 18\,\text{د}^{2} - 76\,\text{د} + 24 = 0 \qquad (2)$

معادلات (۱) اور (۲) کے بائین طرف کی ارکان کا دفق مشترک $3\,\text{د}^{2} - 19\,\text{د} + 6$ ہے اسکو برابر صفر کے لکھکر ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہی کہ $\text{د} = \frac{1}{3}$ یا $\text{د} = 6$ پس $\frac{1}{3}$ اور ۶ مطلوبہ قیمتین ہین

دسوان باب معادلات متکافیہ

(۱۳۲) مساوات متکافیہ اوسی کہتی ہین کہ اگر مقدار مجہول بدل کر متکافی اپنا ہو جاوے تو بھی وہ مساوات نہ بدلی اسی معلوم ہوا کہ اگر ا قیمت ایسی مساوات کی ہو تو ا کا متکافی یعنی $\frac{1}{\text{ا}}$ بھی اوس مساوات کی قیمت ہو اب ہم لکھینگے کہ مساوات متکافیہ کا حل موقوف

اوس مساوات کی حل پر ہی کہ جسکا درجہ مساوات مفروضہ کی نصف درجہ سی بڑا نہیں ہی
اول ہم یہہ کہتی ہین کہ مساوات کی امثال مین کیا ارتباط ہو کہ وہ مساوات متکافیہ ہو اور
بعد ازان یہہ لکھینگے کہ مساوات کا تنزل ہو کر کسطرح حل اوسکا اسان ہو سکتا ہے

(۱۳۳) وہ شرائط دریافت کرو کہ جسی مساوات مفروضہ ایک مساوات متکافیہ ہو
فرض کرو کہ مساوات

$$\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ع}_1 \text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ع}_2 \text{لا}^{\text{ن}-2} + \cdots + \text{ع}_{\text{ن}-2} \text{لا}^2 + \text{ع}_{\text{ن}-1} \text{لا} + \text{ع}_{\text{ن}} = 0 \quad (1)$$

لا کو $\frac{1}{\text{لا}}$ سی بدلو اور پہر $\text{لا}^{\text{ن}}$ مین ضرب دو اور $\text{ع}_{\text{ن}}$ پر تقسیم کرو اور ارقام کو دوبارہ مرتب کرو تو یہہ حاصل ہو گا کہ

$$\text{لا}^{\text{ن}} + \frac{\text{ع}_{\text{ن}-1}}{\text{ع}_{\text{ن}}} \text{لا}^{\text{ن}-1} + \frac{\text{ع}_{\text{ن}-2}}{\text{ع}_{\text{ن}}} \text{لا}^{\text{ن}-2} + \cdots + \frac{\text{ع}_2}{\text{ع}_{\text{ن}}} \text{لا}^2 + \frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_{\text{ن}}} \text{لا} + \frac{1}{\text{ع}_{\text{ن}}} = 0 \quad (2)$$

اب (۲) اور (۱) کی تطبیق کی لئی ضروری ہی کہ امثال یکسان قوا لا کی اپسمین برابر ہون تو

$$\text{ع}_1 = \frac{\text{ع}_{\text{ن}-1}}{\text{ع}_{\text{ن}}} \text{ اور } \text{ع}_2 = \frac{\text{ع}_{\text{ن}-2}}{\text{ع}_{\text{ن}}} \cdots \text{ع}_{\text{ن}-2} = \frac{\text{ع}_2}{\text{ع}_{\text{ن}}} \text{ و } \text{ع}_{\text{ن}-1} = \frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_{\text{ن}}} \text{ و } \text{ع}_{\text{ن}} = \frac{1}{\text{ع}_{\text{ن}}}$$

اخر مساوات سی یہہ حاصل ہوتا ہی کہ $\text{ع}_{\text{ن}}^2 = 1$ اسیواسطی $\text{ع}_{\text{ن}} = +1$ یا -1 اسسے
معادلات متکافیہ کی دو نوع بنتی ہین

اول فرض کرو کہ $\text{ع}_{\text{ن}} = 1$ تو یہہ حاصل ہو گا کہ

$$\text{ع}_1 = \text{ع}_{\text{ن}-1} \text{ اور } \text{ع}_2 = \text{ع}_{\text{ن}-2} \cdots \text{ع}_{\text{ن}-2} = \text{ع}_2 \text{ و } \text{ع}_{\text{ن}-1} = \text{ع}_1$$

پس معلوم ہوا کہ جو مساوات ایسی ہی کہ اول و اخر سی ارقام متساوی البعاد کے امثال برابر ہین
وہ مساوات متکافیہ ہی

دوم فرض کرو کہ $\text{ع}_1 = -1$ تو یہہ حاصل ہو گا کہ

$$\text{ع}_1 = -\text{ع}_{\text{ن}-1} \text{ و } \text{ع}_2 = -\text{ع}_{\text{ن}-2} \cdots \text{ع}_{\text{ن}-2} = -\text{ع}_2 \text{ و } \text{ع}_{\text{ن}-1} = -\text{ع}_1$$

اس صورت مین اگر مساوات جفت درجہ کی ہی تو اوپر کے سلسلہ شرائط مین $\text{ع}_{\text{م}} = -\text{ع}_{\text{م}}$ اگر
$\text{م} = \frac{1}{2}\text{ن}$ کی ہو اور یہہ نا ممکن ہی بشرطیکہ $\text{ع}_{\text{م}} = 0$ کے نہ ہو
پس مساوات متکافیہ وہ مساوات ہی جسمین اغاز و انجام سی ارقام متساوی الابعاد

مقدار مین برابر اور علامت مین مختلف ہون مگر اوسکی ساتھہ یہہ بہی شرط ہی کہ اگر مساوات جفت درجہ کی ہو تو رقم متوسط کا سر صفر ہو

(۱۳۴) اول نوع کی مساوات متکافیہ طاق درجہ کی ایک قیمت کا -۱ ہونا بادی النظر مین ظاہر معلوم ہوتا ہی پس اگر ح (لا) = ۰ مساوات کو تعبیر کری تو ح (لا) پورا لا+۱ پر تقسیم ہوگا دفعہ ۶ کو دیکہو فرض کرو کہ سر (لا) خارج قسمت ہو تو سر (لا) = ۰ مساوات متکافیہ جفت درجہ کی ہوگی اور اوسکی اخر رقم مثبت ہوگی

دوسری نوع کی مساوات متکافیہ طاق درجہ کی ایک قیمت کا +۱ ہونا بادی النظر مین ظاہر معلوم ہوتا ہی پس اگر ح (لا) = ۰ مساوات کو تعبیر کری تو مساوات ح (لا) پورا لا-۱ پر تقسیم ہوگا دفعہ ۶ دیکہو اور فرض کرو کہ سر (لا) خارج قسمت نکلتا ہی تو سر (لا) = ۰ مساوات متکافیہ جفت درجہ کی ہوگی اور اوسکی اخر رقم مثبت ہوگی

دوسری نوع کی مساوات متکافیہ جفت درجہ کی ایک قیمت +۱ اور دوسری قیمت -۱ ہوگی یہہ امر ظاہر بادی النظر مین معلوم ہوتا ہی پس اگر ح (لا) = ۰ مساوات کو تعبیر کری تو ح (لا) پورا لا۲-۱ پر تقسیم ہوگا دفعہ ۲۳ کو دیکہو اور فرض کرو کہ سر (لا) خارج قسمت نکلتا ہی تو سر (لا) = ۰ مساوات متکافیہ جفت درجہ کی ہوگی اور اوسکی اخر رقم مثبت ہوگی

(۱۳۵) خاص قیمتون کی باب مین جو کچہہ اوپر بیان ہوا وہ بدیہی ہی مگر اوسکا اثبات بہی ساتھہ ان کے اخر صورت مین دوسری نوع کی جو مساوات متکافیہ جفت درجہ کی بیان ہوئی اوسپر خیال کرو فرض کرو کہ ح (لا) = ۰ مساوات کو تعبیر کرتا ہی اب ہم کو یہہ معلوم ہی کہ ح (لا) یا کہ ح (لا) = - لان ح $(\frac{1}{لا})$ اور یہہ بہی ہم کو معلوم ہے کہ ح (لا) پورا لا۲-۱ پر تقسیم ہوتا ہی اب ہم کو ثابت کرنا یہہ ہی کہ خارج قسمت ایسا جملہ ہی کہ اول اور اخر سی ارقام متساوی الابعاد کے امثال برابر مین

ہم کو معلوم ہے کہ ح (لا) = - لان ح $(\frac{1}{لا})$

اسیواسطے $\frac{ح(لا)}{لا^{م}-۱} = - \frac{لا^{م}}{لا^{م}-۱} ح\left(\frac{۱}{لا}\right) = لا^{م-۲} \frac{ح\left(\frac{۱}{لا}\right)}{\frac{۱}{لا^{۲}}-۱}$

اسی ہمارے بیان کی تصدیق ہوتی ہی کیونکہ $\frac{ح\left(\frac{۱}{لا}\right)}{\frac{۱}{لا^{۲}}-۱}$ اسطرح حاصل ہوتا ہی کہ $\frac{ح(لا)}{لا^{۲}-۱}$ مین لا کو $\frac{۱}{لا}$ سے بدل دین

(۱۳۶) دفعہ ۱۳۴ سی یہہ ثابت ہوتا ہی کہ مساوات متکافیہ کیا تو جفت درجہ کی ہوگی اور اخر رقم مثبت ہوگی یا اوسکا تنزل اسی صورت مین ہوسکتا ہی پس اسی صورت کی مساوات کو مدار اپنی ساری تحقیقات کا قرار دیتی ہین اور اب ثابت کرینگی کہ ایسی مساوات کا تنزل اوسکی نصف درجہ تک ہوسکتا ہے

(۱۳۷) مساوات متکافیہ جفت درجہ کی ہی اور اوسکی اخر رقم مثبت ہی مطلوب یہہ ہی کہ اوسکا تنزل کرین

فرض کرو کہ مساوات $لا^{۲م} + ع_{۱} لا^{۲م-۱} + ع_{۲} لا^{۲م-۲} + \cdots + ع_{۲} لا^{۲} + ع_{۱} لا + ۱ = ۰$

$لا^{م}$ پر تقسیم کرو اور اغاز او رانجام سے جو اقسام متساوی البعاد ہون اونکو اکہٹا کرکے زوج بناؤ تو

$لا^{م} + \frac{۱}{لا^{م}} + ع_{۱}\left(لا^{م-۱} + \frac{۱}{لا^{م-۱}}\right) + ع_{۲}\left(لا^{م-۲} + \frac{۱}{لا^{م-۲}}\right) + \cdots = ۰$

اب فرض کرو کہ $لا + \frac{۱}{لا} = د$ تو

$$لا^{۲} + \frac{۱}{لا^{۲}} = د^{۲} - ۲$$

$$لا^{۳} + \frac{۱}{لا^{۳}} = \left(لا^{۲} + \frac{۱}{لا^{۲}}\right)\left(لا + \frac{۱}{لا}\right) - د = د^{۳} - ۳د$$

اور علی العموم $لا^{ع+۱} + \frac{۱}{لا^{ع+۱}} = \left(لا^{ع} + \frac{۱}{لا^{ع}}\right)\left(لا + \frac{۱}{لا}\right) - \left(لا^{ع-۱} + \frac{۱}{لا^{ع-۱}}\right)$

پس ہم $لا^{ع+۱} + \frac{۱}{لا^{ع+۱}}$ کو جملہ ناطقہ د کا ع + ۱ درجہ کا کہہ سکتی ہین اسی معلوم ہوا کہ اوپر کی مساوات مین انکی مندرج کرنی سی ایک مساوات د کی م درجہ کی حاصل ہوگی اور پہر د کی ہر یک قیمت کی مطابق لا کی دو قیمتین اور ایک جز ضربی $لا^{۲} - د لا + ۱$ حاصل ہوگا

(۱۳۸) دفعہ گذشتہ کا ارتباط علی العموم اسطرح بیان ہوسکتا ہے کہ

$$لا^{ع+۱} + \frac{۱}{لا^{ع+۱}} = \left(لا^{ع} + \frac{۱}{لا^{ع}}\right) د - \left(لا^{ع-۱} + \frac{۱}{لا^{ع-۱}}\right)$$

اسی ثابت ہوتا ہے کہ مقادیر

$$\text{لا} + \frac{1}{\text{لا}} \;\text{اور}\; \text{لا}^2 + \frac{1}{\text{لا}^2} \;\text{اور}\; \text{لا}^3 + \frac{1}{\text{لا}^3} \;\ldots\ldots$$

سلسلہ مکررہ بنائی مین اور قسطاس ارتباط ۱ - ی + ا ہی انچاسوان باب جبر مقابلہ کا دیکھو

اب ہم آگی ایک جملہ عامہ $\text{لا}^{\text{ع}} + \frac{1}{\text{لا}^{\text{ع}}}$ کے واسطی ارقام ی مین لکھینگے

(۱۳۹) تمثیلاً مساوات متکافیہ

$$2\text{لا}^6 + \text{لا}^5 - 13\text{لا}^4 + 13\text{لا}^2 - \text{لا} - 2 = 0 \;\text{ہو تو}$$

بادی النظر مین یہان ۱ اور -۱ قیمتین معلوم ہوتی ہین اسیواسطے دائین طرف کی رکن کو $\text{لا}^2 - 1$ پر تقسیم کر سکتی ہین اور اوسی ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$2\text{لا}^4 + \text{لا}^3 - 11\text{لا}^2 + \text{لا} + 2 = 0$$

اسیواسطے $\text{لا}^2 + \frac{1}{\text{لا}^2} + \frac{1}{2}\left(\text{لا} + \frac{1}{\text{لا}}\right) - \frac{11}{2} = 0$

$\text{لا} + \frac{1}{\text{لا}} = \text{ی}$ رکھو تو

$$\text{ی}^2 - 2 + \frac{\text{ی}}{2} - \frac{11}{2} = 0$$

$$\text{یا}\; \text{ی}^2 + \frac{\text{ی}}{2} - \frac{15}{2} = 0$$

$$\text{ی} = \frac{5}{2} \;\text{یا}\; -3$$

اسی معلوم ہوا کہ $\text{لا} + \frac{1}{\text{لا}} = \frac{5}{2}$ یا $\text{لا} + \frac{1}{\text{لا}} = -3$

اسیواسطے $\text{لا} = 2$ یا $\frac{1}{2}$ یا $\frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{5})$

(۱۴۰) مساوات

$$\text{لا}^{2\text{م}} + \text{ع}\,\text{لا}^{2\text{م}-1} + \text{ع}_2\,\text{لا}^{2\text{م}-2} + \ldots + \text{ع}_\text{م}\,\text{لا}^\text{م} + \text{ع}_{\text{م}-1}\,\text{س}\,\text{لا}^{\text{م}-1} + \text{ع}_{\text{م}-2}\,\text{س}^2\,\text{لا}^{\text{م}-2}$$
$$+ \ldots + \text{ع}_2\,\text{س}^{\text{م}-2}\,\text{لا}^2 + \text{ع}_1\,\text{س}^{\text{م}-1}\,\text{لا} + \text{س}^\text{م} = 0$$

بدل کر مساوات متکافیہ بن سکتی ہی اسطرح کہ $\text{لا} = \text{ی}\sqrt{\text{س}}$ کے فرض کرین اور $\text{س}^{\text{م}}$ پر تقسیم کرین تو مساوات متکافیہ ی مین حاصل ہوجائیگی جسکی صورت اصلی کینڈی پر ہوگی

گیارہوان باب معادلات ثنائی یا دوری

(۱۴۱) جس مساوات کی صورت $لا^{ن} - ا = ۰$ ہو اور اوسمین ا مقدار معلوم ہو تو اوسکو معادلہ یا مساوات ثنائی کہتی ہین۔ اس مساوات کی قیمتین سب مختلف ہوتی ہین کیونکہ $لا^{ن} - ا$ کا اول حملہ مشتقہ $ن لا^{ن-۱}$ ہے اور کوئی قیمت ایسی لا کی نہین ہوسکتی کہ $لا^{ن} - ا$ اور $ن لا^{ن-۱}$ کو معدوم کری دفعہ ۷۵ دیکھو

(۱۴۲) اگر $لا^{ن} - ا = ۰$ تو $لا = \sqrt[ن]{ا}$ یعنی لا برابر ا کی ن مرتبہ کی نزول کے ہی لیکن مساوات $لا^{ن} - ا = ۰$ کی ن قیمتین بموجب دفعہ ۳۴ کی ہین اور بموجب دفعہ ۱۴۱ کے سب مختلف ہین اسی یہہ ایک بڑا نتیجہ نکلتا ہی کہ ہر یک مقدار جبریہ کی ن مرتبی کی نزول ن طرح کی ہوتی ہین مقدار جبریہ سی مراد ہی ہماری حقیقی مقدار سی یا مقدار تخیلی سی جو ع + ق $\sqrt{-۱}$ کی صورت کہتی ہو

(۱۴۳) فرض کرو کہ ا مقدار کی ن مرتبی کی نزولون مین سی ایک کو ط تعبیر کرتا ہی تو $ط^{ن} = ا$ پس مساوات $لا^{ن} - ا = ۰$ مین $لا = ط ی$ کے فرض کرو تو $ط^{ن} ی^{ن} - ا = ۰$ اسیواسطے $ی^{ن} - ۱ = ۰$ اسی معلوم ہوا کہ $ی = \sqrt[ن]{۱}$ یعنی ی برابر ایک کے ن مرتبہ کے نزول کی برابر ہے اور $لا = ط ی = ط \sqrt[ن]{۱}$ لیکن $لا = \sqrt[ن]{ا}$ اسیواسطی $\sqrt[ن]{ا} = ط \sqrt[ن]{۱}$ پس پس کسی مقدار جبریہ کی ن مرتبی کی نزول اسطرح دریافت ہوسکتی ہین کہ اونمین سی ایک کو واحد کے ن نزولون مین متواتر ضرب دین

(۱۴۴) اب فرض کرو کہ ا ایک حقیقی مثبت مقدار ہی اور ہم کو مساوات $لا^{ن} - ا = ۰$ اور مساوات $لا^{ن} + ا = ۰$ کے حل کرنی ہین اور فرض کرو کہ ط حسابی قیمت ا کے ن نزول کے ہی جو ہمیشہ ضابطہ ثانی کی استعانت سی نکل سکتی ہی خواہ حقیقتاً یا تقریباً جبر مقابلہ کا چوبیسوان باب دیکھو اب $لا = ط ی$ کی فرض کرو تو مساواتین مفروضہ کی یہہ صورت ہو جائیگی کہ $ی^{ن} - ۱ = ۰$ اور $ی^{ن} + ۱ = ۰$ اور یہہ مساواتین علم مثلث جملون کے استعانت سے حل ہوسکتی ہین تئیسوان باب علم مثلث کا دیکھو اب ہم ان مساواتون کو تعبیر علم مثلثی جملون کے استعانت حل کرینگے اور اگرچہ ہم اونکو جبر مقابلہ سی علی العموم نہین حل کرسکتی ہین مگر پہر بہی اونکی باب مین نتایج مستنبط کرسکتی ہین

(۱۴۵) اگر مساوات $لا^{ن} - ۱ = ۰$ کی قیمت سہ ہو تو $سہ^{م}$ بہی اوسکی قیمت ہوگی جسمین م صحیح مثبت یا منفی ہے

اسواسطی کہ $(سہ^{م})^{ن} = سہ^{م ن} = (سہ^{ن})^{م} = ۱^{م} = ۱$

(۱۴۶) اگر مساوات $لا^{ن} + ۱ = ۰$ کی سہ ایک قیمت ہو تو $سہ^{م}$ بہی ایک قیمت ہوگی جسمین م طاق صحیح مثبت یا منفی ہے

اسواسطی کہ $(سہ^{م})^{ن} = سہ^{م ن} = (سہ^{ن})^{م} = (-۱)^{م} = -۱$ اگر م طاق ہو

(۱۴۷) اگر م اور ن متباین ہون تو معادلات $لا^{م} - ۱ = ۰$ اور $لا^{ن} - ۱ = ۰$ کی کوئی مشترک قیمت سوا واحد کے نہین ہو سکتی

فرض کہ ع اور ق دو صحیح ایسی ہون کہ جسمین یہہ ارتباط ہو کہ $ع م - ق ن = ۱$ ایسے صحاح ہمیشہ جبر مقابلہ کی استعانت سی دریافت ہو سکتی ہین چالیسوان باب جبر مقابلہ کا دیکہو اور فرض دونو مساواتون کی مشترک قیمت ط ہی پس $ط^{م} = ۱$ اسیواسطے $ط^{ع م} = ۱$ اور $ط^{ن} = ۱$ اسیواسطے $ط^{ق ن} = ۱$ اسی معلوم ہوا کہ $ط^{ع م - ق ن} = ۱$ یعنی $ط = ۱$

(۱۴۸) اگر ن عدد اولی ہو اور مساوات $لا^{ن} - ۱ = ۰$ کی کوئی سی قیمت سہ ہو مگر واحد نہ ہو تو تمام قیمتین مساوات کی اس سلسلہ $سہ$ و $سہ^{۲}$ و $سہ^{۳}$ . . . $سہ^{ن}$ سے حاصل ہونگین اسواسطی کہ بموجب دفعہ ۱۴۵ کے یہہ مقدار تمام قیمتین مساوات کی ہین اسواسطے اب ہم کو صرف یہہ ثابت باقی رہا کہ اونمین سے کوئی سی دو برابر نہین ہین اگر برابر ہونا ممکن ہو تو فرض کرو کہ $سہ^{ر} = سہ^{ص}$ پس $سہ^{ر - ص} = ۱$ پس اسی ثابت ہوا کہ $لا^{ن} - ۱ = ۰$ اور $لا^{ر - ص} - ۱ = ۰$ قیمت مشترک سوا واحد کی رکہتی ہین اور یہہ بموجب دفعہ ۱۴۷ کی ناممکن ہے اور چونکہ ر - ص کم بہ نسبت ن کے ہے اسواسطی وہ متباین ہین

(۱۴۹) اگر ن عدد اولی نہ ہو اور سہ کوئی سی قیمت مساوات $لا^{ن} - ۱ = ۰$ ہو تو بموجب ۱۴۵ کے یہہ تو درست ہی کہ کوئی قوت سہ کی ایک قیمت مساوات کی ہی لیکن یہہ نہین ہے کہ متواتر قوا سہ سی سب قیمتین مساوات کی ہاتہہ لگ جائین تمثیلاً فرض کرو کہ $ن = ع ق$ اور مساوات $لا^{ع} - ۱ = ۰$ کی قیمت سہ ہی تو مساوات $لا^{ن} - ۱ = ۰$ کی بہی قیمت سہ ہے

اور علی ہذا القیاس اور قواے سہ کی کیفیت ہی لیکن سہ کی قوتون کے لینی سی ع مختلف قیمتون سے زیادہ قیمتین نہین ہی سکتی اسواسطے کہ $سہ^{ع+۱} = سہ^{ع} \times سہ = سہ$ اور $سہ^{ع+۲} = سہ^{ع} \times سہ^{۲} = سہ^{۲}$ اور علی ہذا القیاس پس مساوات $لا^{ن} - ۱ = ۰$ کی قواے سہ سے تمام قیمتین نہین ہاتھہ لگ سکتین

اگر ن عدد اولی نہ ہو تو بہی یہہ درست ہی کہ بعض قیمتین مساوات $لا^{ن} - ۱ = ۰$ کی ایسی خاصیت رکہین کہ اونکی متواتر قیمتون سی تمام قیمتین ہاتھہ لگ جائین علم مثلثہ جملی اگر قیمتون کی جگہہ لین تو یہہ بات اسانی سی ثابت ہو سکتی ہے

(۱۵۰) مساوات $لا^{ن} - ۱ = ۰$ مین اگر ن مختلف اعداد متباینہ کا حاصل ضرب ہو تو اوسکا حل موقوف اون مساواتون پر ہوگا جنکی صورت متشابہ اسی مساوات کی ہو اور اونمین لا کی قوت نما ن کے اجزاء ضربی اوسے ہون

تمثیلاً فرض کرو کہ ن حاصل ضرب تین اجزاء ضربی اولی م و ع و ق کا ہو اور سہ قیمت مساوات $لا^{م} - ۱ = ۰$ کی اور $لا^{ع} - ۱ = ۰$ کی قیمت صہ ہو اور مساوات $لا^{ق} - ۱ = ۰$ کی قیمت لر ہو اور یہہ سب قیمتین مختلف واحد سے فرض کی جائین

اول مساوات $لا^{ن} - ۱ = ۰$ کی قیمتین اس حاصل ضرب کی رقمین ہونگین

$$(۱ + سہ + سہ^{۲} + \cdots + سہ^{م-۱})(۱ + صہ + صہ^{۲} + \cdots + صہ^{ع-۱})(۱ + لر + لر^{۲} + \cdots + لر^{ق-۱})$$

اسواسطے کہ فرض کرو کہ $سہ^{ص} صہ^{ض} لر^{ف}$ ایسے رقم کو تعبیر کرین تو $(سہ^{ص} صہ^{ض} لر^{ف})^{ن} = ۱$ کیونکہ $سہ^{ن} = ۱$ اور $صہ^{ن} = ۱$ اور $لر^{ن} = ۱$ دوم اس حاصل ضرب کی کوئی دو رقمین باہم برابر نہین ہین اسواسطے کہ اگر یہہ ممکن تو فرض کرو کہ $سہ^{ص} صہ^{ض} لر^{ف} = سہ^{ص'} صہ^{ض'} لر^{ف'}$ تو $سہ^{ص-ص'} = صہ^{ض'-ض} لر^{ف'-ف}$ مقدار داہنی طرف قیمت مساوات $لا^{م} - ۱ = ۰$ کی ہے اور بائین طرف کی مقدار قیمت مساوات $لا^{ع ق} - ۱ = ۰$ کی ہی لیکن م اور ع ق متباین ہین تو یہہ ناممکن ہی کہ ان مساواتون کی قیمت مشترک ہو الا واحد یہہ قیمت مستثنے ہے

اگر ن مین اجزاء ضربی متباین تین سی زیادہ ہون تو بہی اسی طرح عمل ہوگا

(۱۵۱) دوم فرض کرو کہ اجزاء ضربی متباین ن مین مکرر واقع ہون اور ن = لو . مو . ھو اسمین لو و مو و ھو کوی قوت اعداد اولی م و ع و ق کی ہین تو یہہ بہی درست ہوگا اگر ہم لو قیمتین مساوات لا^لو - ۱ = ۰ کی اور مو قیمتین مساوات لا^مو - ۱ = ۰ کی اور ھو قیمتین مساوات لا^ھو - ۱ = ۰ ہوا اور موافق ہر ایک نظم کی ان قیمتون کا ہر ایک ممکن حاصل ضرب معلوم کر لین تو مساوات لا^ن - ۱ = ۰ کی تمام قیمتین حاصل ہو جائینگی بموجب دفعہ ۱۴۹ کی ہر ایک نظم کی قیمتین کچہہ ضرور نہین ہے کہ اوس ہر ایک قیمت کی قوا سے تعبیر ہون جسکو خواہ مخواہ مقرر کر لین

اگر ن مین تین مختلف اعداد اولی سی زیادہ اعداد اولی ہون تو یہی عمل اسطرح ہوگا

(۱۵۲) اکثر دستور کی بات ہی کہ ایک دعوی مساوات لا^ن - ۱ = ۰ مین اور زیادہ لکہا کرتی ہین اور سمین ن قوت کسی عدد اولی کی ہوتی ہی اگرچہ یہہ عملاً کچہہ بکار آمد نہین ہی مگر ہم اوسکو یہان لکہتی ہین مثلاً فرض کرو کہ ن = م^۳ اور م عدد اولی ہی اور مساوات لا^م - ۱ = ۰ کی ایک قیمت سہ ہی اور مساوات لا^م - سہ = ۰ کی قیمت صہ ہی اور مساوات لا^م - صہ = ۰ کی قیمت لر ہی تو مساوات لا^ن - ۱ = ۰ کی قیمتین اس حاصل ضرب کی ارقام ہونگین کہ

$$(1 + سه + سه^2 + \ldots + سه^{م-1})(1 + صه + صه^2 + \ldots + صه^{م-1})(1 + لر + لر^2 + \ldots + لر^{م-1})$$

اول کوئی سی رقم اس حاصل ضرب کی ایک قیمت مساوات کی ہی اسواسطے کہ فرض کرو سہ^ی صہ^ص لر^ف کسی رقم کو تعبیر کرتی ہی تو $(سه^{ی} صه^{ص} لر^{ف})^{ن} = سه^{ن ی} صه^{ن ص} لر^{ن ف} = 1$

دوم اس حاصل ضرب کی کوئی سی دو رقمین برابر نہین ہو سکتین اسواسطے کہ اگر یہہ ممکن ہو تو فرض کرو کہ $سه^{ی} صه^{ص} لر^{ف} = سه^{ی'} صه^{ص'} لر^{ف'}$ پس $سه^{ل} = سه^{لر}$ اسمین

$$ل = ی + \frac{ص}{م} + \frac{ف}{م^2} \quad \text{اور} \quad لر = ی' + \frac{ص'}{م} + \frac{ف'}{م^2}$$

اسیواسطے $سه^{ل - لر} = 1$ اسیواسطے $سه^{م^2(ل-لر)} - 1 = 0$ اسمین م = م^۲ (ل - لر) لیکن

$م^2 (ل - لر) = م^2 (ی - ی') + م (ص - ص') + ف - ف'$ اور یہہ م سی متباین ہے اور اسیواسطے م^۲ سی متباین ہی اسیواسطے مساواتین لا^ن - ۱ = ۰ اور لا^م - ۱ = ۰

کی مشترک قیمت سواء واحد کے نہین ہو سکتی

(۱۵۳) عملاً دفعہ بالا کچھہ عظمت نہین رکھتی اسلئی کہ جو اعمال اوسمین کرنے پڑتے ہین وہ علی العموم نہین ہو سکتی فرض کرو کہ مساوات لا^م - ۱ = ۰ کو حل کر سکتے ہین اور سہ کو دریافت کرتی ہین تو تمام مقادیر ا د سہ و سہ^۲ و . . . سہ^(م-۱) قیمتین مساوات لا^ن - ۱ = ۰ کی تو اسطرح ہم کو م قیمتین دریافت ہوجائینگے لیکن صہ کے دریافت کرنی کی واسطے ہم مساوات لا^م - سہ = ۰ کو حل کرین یعنی $\sqrt[م]{سہ}$ کو دریافت کرین اسمین سہ = $\sqrt[م]{۱}$ اور اس دریافت کرنے کے واسطی کوئی ترکیب جبر و مقابلہ مین نہین ہے

مثلاً مساواتین لا^۳ - ۱ = ۰ اور لا^۵ - ۱ = ۰ کو اگر ہم حل کر لین تو مساوات لا^۱۵ - ۱ = ۰ کی بہی تمام حل بموجب دفعہ ۱۵۰ کی حاصل ہوجائینگے مگر ہم عملاً مساوات لا^۹ - ۱ = ۰ یا لا^۲۵ - ۱ = ۰ کو بموجب دفعہ ۱۵۲ کے نہین حل کر سکتی ہم کو صرف تین قیمتین مساوات اول کی اور پانچ قیمتین مساوات دوم کی حاصل ہونگین

(۱۵۴) معادلات لا^ن - ۱ = ۰ اور لا^ن + ۱ = ۰ کی عملی حل کرنی کی ترکیب ہم لکہتی ہین ہمین ن بہت بڑا نہین ہے اگر ن کوئی قوت ۲ کی ہو تو ان مساواتون کے حل مکرر جذر نکالنی سی دریافت کرینگے اور اصم ثنائی کی بار بار جذر نکالنی کی ترکیب جبر و مقابلہ مین لکہی ہے دفعہ ۲۸ کو دیکہو پس اس صورت مین تمام قیمتین معلوم ہوجائینگین اگر ن = ع م اسمین ع = ۲^ر تو لا^ع = ی کے فرض کرو تو مساواتین لا^ن - ۱ = ۰ اور لا^ن + ۱ = ۰ کی ہو جائینگین کہ ی^م - ۱ = ۰ اور ی^م + ۱ = ۰ پس اگر ی معلوم ہوجاے تو لا اسطرح دریافت ہوگا کہ ہم ر دفعہ مکرر جذر نکالین

(۱۵۵) مساوات لا^ن - ۱ = ۰ مین فرض کرو کہ ن طاق عدد ہی یعنی ن = ۲م + ۱ تو مساوات لا^(۲م+۱) - ۱ = ۰ کی ایک حقیقی قیمت ہوگی یعنی +۱ اسواسطے کہ اوسکی کوئی منفی قیمت نہین ہے اور اگر لا کو برابر کسی مقدار کے سواء واحد کی قرار دین تو لا^(۲م+۱) کبہی واحد کی

برابر نہین ہوگا پس معلوم ہوا کہ مساوات کی حقیقی قیمت ایک ہی ہی $لا^{۲م+۱} - ۱$ کو $لا - ۱$ پر تقسیم کریں تو

تو مساوات مختصر اور تحویل ہو کر یہہ پیدا ہوگی جسکو حل کرنا چاہی کہ

$$لا^{۲م} + لا^{۲م-۱} + لا^{۲م-۲} + \ldots + لا^{۲} + لا + ۱ = ۰$$

یہہ مساوات متکافیہ ہی اور اسکا حل م درجہ کی مساوات کے حل پر موقوف ہے

(۱۵۶) مساوات $لا^{ن} - ۱ = ۰$ فرض کرو کہ ن جفت ہی اور $ن = ۲م$ تو مساوات کے حقیقی قیمتین صرف دو +۱ اور -۱ ہین اور $لا^{۲م} - ۱$ کو $لا - ۱$ اور $لا + ۱$ کے حاصل ضرب $لا^{۲} - ۱$ پر تقسیم کرتے ہین پس جو مساوات حل کرنی پڑیگی وہ یہہ مختصر اور تحویل ہو کر حاصل ہوگی

$$لا^{۲م-۲} + لا^{۲م-۴} + \ldots + لا^{۲} + ۱ = ۰$$

یہہ مساوات متکافیہ ہی اور اوسکا حل م - ۱ درجہ کی مساوات کی حل پر موقوف ہے

مساوات $لا^{۲م} - ۱ = ۰$ کو $(لا^{م} - ۱)(لا^{م} + ۱) = ۰$ کی صورت مین لکھکر ہم عمل آسانی سی کر سکتی ہین اور پہر اسکو تحلیل ان مساواتوں $لا^{م} - ۱ = ۰$ اور $لا^{م} + ۱ = ۰$ مین کر لین یا اوس ترکیب کو عمل مین لائین جو دفعہ ۱۵۴ مین بیان ہوئی

(۱۵۷) مساوات $لا^{ن} + ۱ = ۰$ مین فرض کرو کہ ن طاق ہی اور $ن = ۲م + ۱$ اور مساوات $لا^{۲م+۱} + ۱ = ۰$ کی صرف ایک حقیقی قیمت یعنی -۱ ہی اور $لا^{۲م+۱} + ۱$ کو $لا + ۱$ پر تقسیم کرین تو مساوات مختصر تحویل ہو کر حل کرنی کی واسطی یہہ پیدا ہوگی کہ

$$لا^{۲م} - لا^{۲م-۱} + لا^{۲م-۲} - \ldots + لا^{۲} - لا + ۱ = ۰$$

یہہ مساوات متکافیہ ہی اور اسکا حل م درجہ کی مساوات کے حل پر موقوف

اگر ن طاق مساوات $لا^{ن} + ۱ = ۰$ مین ہو اور ہم لا کو -لا سی تبدیل کرین تو مساوات $لا^{ن} - ۱ = ۰$ حاصل ہوگی اگر ہم چاہین تو اس دوسری مساوات کو حل کرین اور جو قیمتین نکلین اونکی علامتین بدل دین تو اول مساوات کا حل حاصل ہو جائیگا

(۱۵۸) اگر مساوات $لا^{ن} + ۱ = ۰$ مین ن جفت فرض کرین تو مساوات کی کوئی حقیقی

قیمت نہین ہوگی یہہ مساوات مساوات متکافیہ ہی اور اوسکا حل اوس مساوات کی حل پر موقوف ہے جسکا درجہ نصف اصلی مساوات کی درجہ سی ہی یا اس مساوات کی حل کرنی مین دفعہ ۱۵۸ اکی ترکیب کو کام مین لاؤ

(۱۵۹) پس چار دفعات گذشتہ سی یہہ بات ثابت ہوتی ہی کہ معادلات مفروضہ کا حل ایسی معادلات کی حل پر موقوف ہو سکتا ہی جنکا درجہ نصف معادلات مفروضہ کے درجہ سی ہو

ہر ایک صورت مین حقیقی قیمتون کی موافق جو اجزاء ضربی ہوتی ہین اونکو دور کرنی مین اور لا + ۱/لا = ی لکھتی ہین اور ایک مساوات ی کی حاصل ہوتی ہی اب یہہ مساوات ی کی تمام حقیقی قیمتین ہو سکتی ہین اسواسطی کہ فرض کرو کہ سہ + صہ $\sqrt{-1}$ ایک تخیلی قیمتون مین سی لا کی ہو تو اسکی مطابق ی کی قیمت یہہ ہوگی کہ

$$سہ + صہ\sqrt{-1} + \frac{1}{سہ + صہ\sqrt{-1}} \text{ یعنی } سہ + صہ\sqrt{-1} + \frac{سہ - صہ\sqrt{-1}}{سہ^2 + صہ^2}$$

اور یہہ برابر ایک حقیقی مقدار کے ہی یعنی ی ہے بشرطیکہ یہہ ثابت ہو کہ سہ^2 + صہ^2 = ۱ اب یہہ ہم ثابت کرینگے کہ سہ^2 + صہ^2 برابر ا کے ہے

چونکہ سہ + صہ $\sqrt{-1}$ ایک قیمت مساوات لا^ن ∓ ۱ = ۰ کی ہی تو بموجب دفعہ ۱۵۱ کے سہ − صہ $\sqrt{-1}$ یہی قیمت مساوات کی ہوگی پس

$$(سہ + صہ\sqrt{-1})^ن = \pm 1 \text{ اور } (سہ - صہ\sqrt{-1})^ن = \pm 1$$

اب ضرب دینی $(سہ^2 + صہ^2)^ن = 1$ اسیواسطے سہ^2 + صہ^2 = ±۱

اور سہ^2 + صہ^2 مثبت ہی اسلئی سہ^2 + صہ^2 برابر ا کے ہوا

(۱۶۰) اب ہم بعض مثالین معادلات

لا^ن + ۱ = ۰ اور لا^ن − ۱ = ۰ کی لکھتے ہین

(۱) لا^3 − ۱ = ۰ اسی معلوم ہوتا ہے کہ (لا − ۱) (لا^2 + لا + ۱) = ۰

اسی معلوم ہوا کہ قیمتین ۱ اور $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ ہی پس یہہ تین قیمتین + ۱ کی تین جذر الکعب ہین اور اونکی علامتین بدلنی سی ہم کو تین جذر الکعب − ۱ کے حاصل ہوتی ہین یا اسکو یون بیان کرو کہ مساوات لا^3 + ۱ = ۰ کی قیمتین حاصل ہوتی ہین

(۲) $لا^{۴} + ۱ = ۰$ مین $لا + \frac{۱}{لا} = ی$ کے رکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ $ی^{۲} - ۲ = ۰$

پس $ی = \pm \sqrt{۲}$

اسیواسطے $لا^{۴} + ۱ = (لا^{۲} + لا\sqrt{۲} + ۱)(لا^{۲} - لا\sqrt{۲} + ۱)$

ان دوم درجون کی ساواتون کی قیمتون کی دریافت کرنی سی حل کامل ہوجایگا

(۳) $لا^{۵} - ۱ = ۰$ اسی حاصل ہوتاہی کہ $(لا - ۱)(لا^{۴} + لا^{۳} + لا^{۲} + لا + ۱) = ۰$

اسی معلوم ہوتاہی کہ مساوات $لا^{۲} + \frac{۱}{لا^{۲}} + لا + \frac{۱}{لا} + ۱ = ۰$ یعنی

$ی^{۲} + ی - ۱ = ۰$ کی حل ہونی چاہی پس $ی = \frac{-۱ \pm \sqrt{۵}}{۲}$

اسیواسطے $لا^{۵} - ۱ = (لا - ۱)\left(لا^{۲} + لا\frac{\sqrt{۵} - ۱}{۲} + ۱\right)\left(لا^{۲} + لا\frac{\sqrt{۵} + ۱}{۲} + ۱\right)$

ان دوم درجہ کی ساواتون کے حل کرنی سی کامل حل ہوجایگا اور قیمتون کی علامتین بدل دین تووہ مساوات $لا^{۵} + ۱ = ۰$ کی قیمتین بنجائینگی

(۱۶۱) اگر ہم مساوات $لا^{۶} - ۱ = ۰$ کی حل کرنی مین کوشش کرین تو ہم کو مساوات ی کی تیسری درجہ کی حاصل ہوگی اور اگر مساوات $لا^{۸} - ۱ = ۰$ کے حل کرنے مین سعی کرین توی کی چوتھی درجہ کی مساوات حاصل ہوگی اب اگی دوبابون مین بتلائینگے کہ تیسری اور چوتھی درجہ کی مساواتین کسطرح حل ہوتی ہین یہہ بات معلوم ہوجائیگی کہ حل کی ترکیبین عملاً کسی کام کی نہین ہوتین جبکہ معادلات جنکو حل کرتی ہین تمام حقیقی قیمتین رکہتی ہون جیسی کہ یہان صورت ہی جسپر بحث موافق دفعہ ۱۵۹ کے ہم کرتے ہین

(۱۶۲) اگر مساوات $لا^{۲ن} + ع لا^{ن} + ق = ۰$ کی صورت کی ہو تو ہم مساوات درجہ دوم موافق حل کرکی $لا^{ن}$ کی قیمتین دریافت کرتی ہین اور پہر موافق اس باب کی ترکیبون کے لا کی قیمتین دریافت ہوسکتی ہین

اب یہان ہم ایک دعوی دو مقادیر اصم کی حاصل ضرب کے باب مین ثابت کرکی اس باب کو ختم کرتی ہین

(۱۶۳) فرض کرو کہ ا اور ب دو مقادیر جبریہ ہون اور م اور ن صحاح مثبتہ ہون تو $\sqrt[م]{ا}$

کی م مختلف قیمتیں ہونگیں اور $\sqrt[ن]{ب}$ کی ن مختلف قیمتیں موافق دفعہ ۱۴۲ کے ہونگیں اسی معلوم ہوا کہ $\sqrt[م]{ا}$ اور $\sqrt[ن]{ب}$ کی حاصل ضرب کی م ن مختلف قیمتوں سے زیادہ قیمتیں نہیں ہوسکتیں اور اب ہم یہہ ثابت کرینگی کہ اوسکی اتنی قیمتیں نہیں ہوسکتیں بشرطیکہ م اور ن متباین نہ ہوں اور اس دعوی سی پہلی اس دعوی کو ثابت کرینگی کہ $\sqrt[م]{ا}$ اور $\sqrt[ن]{ب}$ کی حاصل ضرب کے مختلف قیمتیں م اور ن کی ذو اضعاف اقل کی برابر ہوتی ہیں

فرض کرو کہ $\sqrt[م]{ا}$ کی قیمتوں میں سے ایک قیمت ط ہو تو تمام قیمتیں $\sqrt[م]{ا}$ کی ط $\sqrt[م]{1}$ میں شامل ہونگیں اور فرض کرو کہ $\sqrt[ن]{ب}$ کی قیمتوں میں سی ص ایک قیمت ہو تو $\sqrt[ن]{ب}$ کی تمام قیمتیں ص $\sqrt[ن]{1}$ میں داخل ہونگیں اسی معلوم ہوا کہ تمام قیمتیں حاصل ضرب کے ط ص × $\sqrt[م]{1}$ × $\sqrt[ن]{1}$ میں داخل ہیں اور اسواسطے حاصل ضرب کے مختلف قیمتوں کی تعداد وہی ہوگی جو $\sqrt[م]{1}$ × $\sqrt[ن]{1}$ کی ہے فرض کرو کہ م اور ن کا ذو اضعاف اقل ل ہی تو $(\sqrt[م]{1} \times \sqrt[ن]{1})^{ل} = 1$

پس $\sqrt[م]{1}$ × $\sqrt[ن]{1}$ برابر واحد کے ل مرتبہ کے نزول کی ہی اسواسطی ل مختلف قیمتوں سے زیادہ قیمتیں نہیں ہوسکتیں

لیکن ہم کو یہہ ثابت کرنا باقی رہا کہ $\sqrt[م]{1}$ × $\sqrt[ن]{1}$ فی الحقیقت ل مختلف قیمتیں رکھتا ہے فرض کرو کہ ع ذو قوس اعظم م اور ن کا ہی اور $\frac{م}{ع}$ = لو بس $\sqrt[لو]{1}$ کی لو قیمتیں $\sqrt[م]{1}$ کی م قیمتوں میں داخل ہیں اور $\sqrt[م]{1}$ × $\sqrt[ن]{1}$ کی ل قیمتیں اسطرح حاصل ہوسکتی ہیں کہ $\sqrt[لو]{1}$ کی لو قیمتوں اور $\sqrt[ن]{1}$ کی ن قیمتوں کے حاصل ضرب کے مختلف ارقام لیں اور یہہ رقمیں سب مختلف ہونگیں اسواسطے کہ اگر لو قیمتوں میں سی دو قیمتیں س اور سَ ہیں اور ن قیمتوں میں سی ص اور صَ دو قیمتیں ہیں تو س ص برابر سَ صَ کی نہیں ہوسکتا اسواسطی کہ اگر س ص = سَ صَ تو $\frac{س}{سَ} = \frac{صَ}{ص}$ دائیں طرف کا رکن ایک قیمت مساوات لا^لو - ۱ = ۰ کی ہی اور بائیں طرف کا رکن ایک قیمت مساوات لا^ن - ۱ = ۰ کی ہے اور ان مساواتوں کے کوئی قیمت مشترک سوا واحد کے بموجب دفعہ ۱۴۷ کے نہیں ہوسکتی

(۱۴۸) بعض اوقات دفعہ گذشتہ کے اصل اصول اسطرح بیان کیے جاتے ہیں کہ ہم کو معلوم ہے کہ $\sqrt[م]{ا} \times \sqrt[ن]{ا} = ا^{\frac{م+ن}{م ن}}$ اور

اگر $\frac{م + ن}{م ن}$ کو مختصر الحدین بنائین تو شمار کنندہ ایک صحیح عدد ہوگا اور راور نسب نما رہوگا اسطرح $\frac{م + ن}{ا^م ا^ن} = \frac{۱}{ا^ر}$ اور اسکی مختلف قیمتین ہین یہہ ترکیب اثبات کی مضمحل ہی کیونکہ جبر مقابلہ مین جو معمولی مسئلہ مقادیر اصم کا لکھا گیا ہی وہ مقادیر اصم کی حسابیہ قیمتون کے واسطی ثابت کیا گیا ہی اسواسطے اوسی یہہ ارتباط $\frac{۱}{ا^م} + \frac{۱}{ا^ن} = \frac{م + ن}{ا^م ا^ن}$ موافق اوس معنی کے جو یہان لی گئی ہین نہین ثابت ہوتا ہے

بارہوان باب معادلات مکعبی

(۱۶۵) مساوات درجہ دوم کی حل کرنے کی بابمین بحث کرنی یہان فضول ہی اسلئی کہ اسکا مفصل حال جبر مقابلہ مین بیان ہوچکا ہی اس باب مین فقط درجہ سوم کی مساواتون سی جنکو معادلات مکعبی کہتے ہین بحث ہوگی

دفعہ ۱۵۸ مین ہم نی یہہ ثابت کیا ہی کہ مساوات مفروضہ کی ایسی ہیئت بدل سکتی ہے کہ اوسمین دوسری رقم معدوم ہو جس مساوات مکعبی مین دوسری رقم نہو اوسکی قیمتون کی بہت صاف صاف جملی بہ نسبت کامل مساوات مکعبی کے قیمتون کی ہوتی ہین اسلئی ہم یہہ فرض کرلیتے ہین کہ جن مکعبی مساواتون کو ہم حل کرتی ہین اونمین دوسری رقم نہین ہے جس عمل کو اب ہم لکھینگے اوسکا نام کارڈن کا حل مکعبی مساوات کا ہے

(۱۶۶) مساوات $لا^۳ + ق لا + ر = ۰$ کو حل کرو

فرض کرو کہ $لا = د + ی$ اور د اور ی بالفعل دو مقادیر مجہول ہین

ا‌نکو مساوات مفروض مین لا کی جگہ رکھو تو

$$(د + ی)^۳ + ق (د + ی) + ر = ۰$$

یعنی $$د^۳ + ی^۳ + (۳ د ی + ق) (د + ی) + ر = ۰$$

ہم نی صرف دو مقادیر د اور ی کی بابمین ایک یہہ بات فرض کی ہی کہ اونکا مجموعہ مساوات مفروضہ کی ایک قیمت ہو اسلئی ہم کو اختیار ہی کہ کوئی دوسری بات بھی اونکی باب مین فرض کرین کیونکہ وہ دو مقادیر مجہول ہین اونکی واسطی دو شرائط مقرر کرسکتی ہین پس فرض کرو کہ $۳ د ی + ق = ۰$

تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{د}^3 + \text{ی}^3 + \text{ر} = 0$$

ی کی قیمت ارقام د مین مندرج کرو تو

$$\text{د}^3 - \left(\frac{\text{ق}}{3\,\text{د}}\right)^3 + \text{ر} = 0$$

یعنی $\text{د}^6 + \text{ر}\,\text{د}^3 - \frac{\text{ق}^3}{27} = 0$

اسی معلوم ہوا کہ $\text{د}^3 = -\frac{\text{ر}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\text{ر}^2}{4} + \frac{\text{ق}^3}{27}\right)}$

اور $\text{ی}^3 = -\text{ر} - \text{د}^3 = -\frac{\text{ر}}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{\text{ر}^2}{4} + \frac{\text{ق}^3}{27}\right)}$

اور نیز لا = د + ی اب ہم د^3 اور ی^3 کے قیمتون مین اوپر کی علامت لین تو اور نیچی کی لین تو دونو صورتون مین ایک ہی نتیجہ حاصل ہوگا صفائی کی واسطی ہم اوپری کی علامت لیتے ہین تو

$$\text{لا} = \left[-\frac{\text{ر}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\text{ر}^2}{4} + \frac{\text{ق}^3}{27}\right)}\right]^{\frac{1}{3}} + \left[-\frac{\text{ر}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\text{ر}^2}{4} + \frac{\text{ق}^3}{27}\right)}\right]^{\frac{1}{3}}$$

پس لا کے واسطی جو جملہ ہی اوسمین دو جزر الکعب ہین اور ہر مقدار کے تین جزر الکعب ہین تو اب ہم کو یہہ دریافت کرنا چاہئی کہ بالفعل کونسی جزر الکعب لینی چاہئی فرض کرو کہ

$$\text{سہ} = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{-3}\right)$$

تو بموجب دفعہ ۱۶۰ کے اگی تین جزر الکعب ۱ اور سہ اور سہ^2 ہین اب فرض کرو کہ $\sqrt[3]{\left(\frac{\text{ر}^2}{4} + \frac{\text{ق}^3}{27}\right)} + \frac{\text{ر}}{2}$ مکعبون مین سی ایک جزر الکعب م ہی تو اور جزر الکعب م سہ اور م سہ^2 ہونگے اور $-\frac{\text{ر}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\text{ر}^2}{4} + \frac{\text{ق}^3}{27}\right)}$ کے جزر الکعبون مین سی ایک جزر الکعب کو ن تعبیر کرتا ہی تو اور جزر الکعب ن سہ اور ن سہ^2 ہین لا کے جملے مین جو جزر الکعب واقع ہوئی ہین اونمین سی ہر ایک کی واسطی اوسکی تین قیمتون مین سے ہر ایک قیمت لگائین تو ہم کو کل ۹ قیمتین حاصل ہونگین لیکن مکعبی مساوات کی صرف تین قیمتین ہوتی ہین تو اسی یہہ نتیجہ نکلتا ہی کہ ان نو قیمتون مین سی صرف تین قیمتین مساوات مین دخل رکھتی ہین اور باقی خارج ہین اور فی الحقیقت عمل حل مین د ی = $-\frac{\text{ق}}{3}$

ایک شرط ہی پس جو قیمتین اس شرط کو پورا کرین وہی قیمتین مساوات مین دخل رکھتی ہین فرض کرو کہ م اور ن ایسی مقرر کی گئی ہین کہ وہ شرط م ن = - $\frac{ق}{۳}$ کو پورا کرتے ہین تو ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ د = م اور ی = ن کے قیمتین دخل پذیر ہونگین اور د = س م اور ی = س^۲ ن کی بہی حاصل ہوگا اور د = س^۲ م اور ی = س ن کے بہی حاصل ہوگا کیونکہ دو تو صورتون مین ارتباط د ی = - $\frac{ق}{۳}$ کی شرائط پوری ہوتی ہین مگر کوئی اور زوج قیمتون کا داخل نہین ہوسکتا تمثیلاً فرض کرو کہ د = م اور ی = س ن تو د ی = - $\frac{س ق}{۳}$ کی حاصل ہوگا اور - $\frac{ق}{۳}$ کی برابر نہین حاصل ہوگا اور ایسی ہی اور زوج قیمتون سی د ی = - $\frac{س ق}{۳}$ یا = - $\frac{س^۲ ق}{۳}$ کے حاصل ہوگا اور - $\frac{ق}{۳}$ نہین حاصل ہوگا اسلئی سوا ان ازدواج قیمتون کی جنکی دخل کی کیفیت اوپر بیان کرائی ہین اور کوئی زوج قیمتون کا شرائط کو الفا نہین کریگا

(۱۶۷) تمثیلاً فرض کرو کہ لا^۳ + ۶لا - ۲۰ = ۰ یہان ق = ۶ اور ر = - ۲۰ پس

$$لا = (۱۰ + \sqrt{۱۰۸})^{\frac{۱}{۳}} + (۱۰ - \sqrt{۱۰۸})^{\frac{۱}{۳}}$$

عددی حساب لگانے سے یہہ حاصل ہوگا کہ

$$(۱۰ + \sqrt{۱۰۸})^{\frac{۱}{۳}} = ۲٫۷۳۲ \text{ اور } (۱۰ - \sqrt{۱۰۸})^{\frac{۱}{۳}} = - ۰٫۷۳۲$$

پس اسی ہم گمان کرتی ہین کہ لا = ۲ کے ہوگا اور امتحان سی یہہ معلوم بہی ہوگا کہ لا = ۲ کی ہی اب دو قیمتون کی بیان کرنی کی واسطی موافق دفعہ گذشتہ کی عمل کرنے کیلئے یہہ بہتر ہوگا کہ ہم مساوات کا تنزل مساوات درجہ دوم کی طرف کرین چونکہ ۲ قیمت مساوات مفروضہ کی ہی اسلئی لا^۳ + ۶لا - ۲۰ پورا لا - ۲ پر تقسیم ہوگا اور یہہ ہم کو دریافت ہوگا کہ

$$لا^۳ + ۶لا - ۲۰ = (لا - ۲)(لا^۲ + ۲لا + ۱۰)$$

اسواسطے باقی دو قیمتین مساوات کی اس مساوات

$$لا^۲ + ۲لا + ۱۰ = ۰$$

کے حل کرنے سے یہہ دریافت ہونگین کہ

$-1 \pm \sqrt{-9}$ اور $-1 \pm 3\sqrt{-1}$

مثال گذشتہ مین ہم امتحان سی یہہ ثابت کرتے ہین کہ

$(10 + \sqrt{108})^{\frac{1}{3}} = 1 + \sqrt{3}$ اور $(10 - \sqrt{108})^{\frac{1}{3}} = 1 - \sqrt{3}$

پس اسطرح قیمت بتعبیر نزول نکالنی کی دریافت ہوگی کوئی عمل جبریہ ایسا نہین ہے کہ ادسی علی العموم جزء الکعب اس جملہ $ا + \sqrt{ب}$ کی صورت کا محدود صورت مین نکال لین دفعہ ۳۱۰ جبر مقابلہ کی دیکھو یہہ اصلی $(ا + \sqrt[3]{ب})^{\frac{1}{3}}$ کی قیمت دریافت کرنی کی واسطی ضابطہ جملہ ثنائی کو کام مین لاکر لانہایت سلسلہ دریافت کرتی ہین اور اس حالت مین اگر $\sqrt{ب}$ کم ا سے ہو تو اس سلسلہ کی انضمامی بنانی کی واسطی سلسلہ کو قوا متصاعدہ $\sqrt{ب}$ مین پہیلائن اور اگر $\sqrt{ب}$ بڑا ا سے ہو تو سلسلہ کو ا کی قوا متصاعدہ مین پہیلائین جبر مقابلہ کا باب ۳۶ اور ۴۰ دیکھو

(۱۶۸) دفعہ ۱۶۶ مین ہم نی لکہا ہی کہ گولا کیو اسطی بظاہر نو قیمتین نکلتی ہین مگر اونمین سی تین مساوات مین دخل رکہتی ہین اور باقی خارج ہین اب ان نو قیمتون کی واقع ہونی کی دلیل یہہ ہی کہ ارتباط $ی = -\frac{ق}{۳ ی}$ فرض کیا گیا تہا اور پہر اوسکی صورت عمل کے اندر $ی^۳ ی^۳ = -\frac{ق^۳}{۲۷}$ مین تبدیل کی گئی ہی اب اس اخر ارتباط مین کچہہ تبدیل نہ ہوگا اگر

ق بدل کس سہ یا ق سہ^۲ ہو گا پس مساوات $لا^۳ + ق لا + ر = ۰$ کے حل کرنے مین نو حل ہم کو دریافت ہوتی ہین اونمین سی تین تو اس مساوات سی متعلق ہوتی ہین اور تین مساوات $لا^۳ + ق سہ لا + ر = ۰$ سی اور تین مساوات $لا^۳ + ق سہ^۲ لا + ر = ۰$ سے

(۱۶۹) مکعبی مساوات مفروضہ کی قیمتون کی صورت پر اب ہم خاص بحث کرتے ہین ق اور ر کو ہم اصلی مقادیر فرض کرینگے $ی^۳$ اور $ی^۳$ کے واسطی جملی کیا تو اصلی ہون گے یا خیالی اول فرض کرو کہ یہہ جملی اصلی ہین تو $ی^۳$ اور $ی^۳$ کے جزء الکعبوں کی حسابی قیمتون کو فرض کرو کہ م اور ن تعبیر کرتی ہین تو مکعبی مساوات مفروض کی اس صورت مین یقینی ایک اصلی قیمت یعنی م + ن ہو گے

اور باقی دو قیمتین م سہ + ن سہ² اور م سہ² + ن سہ ہونگین اور سہ کی قیمت مندرج کرنے سے جداگانہ یہہ قیمتین ہونگین کہ

$-\frac{1}{2}(م+ن) + \frac{1}{2}(م-ن)\sqrt{-3}$

اور $-\frac{1}{2}(م+ن) - \frac{1}{2}(م-ن)\sqrt{-3}$

اور یہہ تخیلی قیمتین ہین بشرطیکہ م = ن کے نہ ہو اور جب م = ن تو مکعبی مساوات کی دو برابر قیمتین ہونگین اور ہریک انمین سی برابر -م یا -ن کے ہو گی اس شرط ضروری جسی یہہ تحقیق ہوجاے کہ م = ن یعنی ی³ = یٌ³ کے یہہ ہی کہ $\frac{ر^2}{4} + \frac{ق^3}{27} = 0$.

بالعکس اسکے اگر مکعبی مساوات کی قیمتین تمام اصلی ہون اور غیر مساوی ہون تو ی³ اور یٌ³ کی جملی تخیلی ہونگی مگر یہہ فرض کرو کہ ی³ اور یٌ³ کی جملی خیالی ہین یعنی فرض کرو کہ $\frac{ر^2}{4} + \frac{ق^3}{27}$ منفی مقدار ہی تو بموجب دفعہ ۱۴۲ کی ہم کو یہہ دریافت ہوگا کہ ی³ اور یٌ³ مین سی ہریک کا جزر المکعب خاص صورت کا ہوگا اسیواسطے ہم فرض کرتی ہین کہ م = لو + مو$\sqrt{-1}$ اور چونکہ ی³ اور یٌ³ مین فرق علامت جذر ہے اسلئے ن = لو - مو$\sqrt{-1}$ اس صورت مین مکعبی مساوات مفروضہ کی تمام اصلی قیمتین یہہ ہین یعنی

لو + مو$\sqrt{-1}$ + لو - مو$\sqrt{-1}$ یعنی ۲ لو ہے

(لو + مو$\sqrt{-1}$) سہ + (لو - مو$\sqrt{-1}$) سہ² یعنی - لو - مو$\sqrt{3}$

اور (لو + مو$\sqrt{-1}$) سہ² + (لو - مو$\sqrt{-1}$) سہ یعنی - لو + مو$\sqrt{3}$

(۱۷) مکعبی مساوات کا حل جو کارڈن صاحب کا ہی اوسے عملاً ایسی صورت مین کچھہ فایدہ نہین حاصل ہوتا کہ مساوات کی سب قیمتین اصلی اور غیر مساوی ہون اسواسطی کہ اس حالت مین جملی ی³ اور یٌ³ کے تخیلی ہوتی ہین اور گو ہم اس بات کو جانتے ہین کہ اونکی جزر المکعب وجود رکھتی ہین مگر کوئی ترکیب اونکی لگانی کی ازروی علم حساب نہین ہی پس ایسی صورت مین ہم کو قیمتین صورت جبریہ مین معلوم ہوجاتی ہین مگر اونکا حساب عددی نہین ہوسکتا اسلئے وہ حساب کچھہ وقعت نہین رکھتی تمثیلاً یہہ مساوات لو کہ

$$\text{لا}^3 - 15\,\text{لا} - 4 = 0$$

یہان ر = -۴ اور ق = -۱۵ اسے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{لا} = \left(2 + \sqrt{-121}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(2 - \sqrt{-121}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{یعنی}\quad \text{لا} = \left(2 + 11\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(2 - 11\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}}$$

اب یہان ظاہر ہی کہ کوئی جزر المکعب نکالنی کا طریق نہین ہی امتحان سی یہہ ثابت ہوتا ہی کہ

$$\left(2 + 11\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}} = 2 + \sqrt{-1}$$

$$\left(2 - 11\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}} = 2 - \sqrt{-1}$$

$$\text{پس لا} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$$

پس ۴ قیمت ہی اب اور قیمتین دفعہ ۱۶۹ اسی دریافت ہوسکتی ہین یا اسطرح عمل کرنی سی کہ

$$\text{لا}^3 - 15\,\text{لا} - 4 = (\text{لا} - 4)(\text{لا}^2 + 4\,\text{لا} + 1)$$

پس ہم کو یہہ مساوات حل کرنی پڑیگی کہ $\text{لا}^2 + 4\,\text{لا} + 1 = 0$ اور اسکی قیمتین $-2 \pm \sqrt{3}$ ہین

اب مساوات $\text{لا}^3 - 3\sqrt[3]{2}\,\text{لا} - 2 = 0$ پر خیال کرو

یہان ر = -۲ اور ق = $-3\sqrt[3]{2}$ پس

$$\text{لا} = \left(1 + \sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(1 - \sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}}$$

یہہ امتحان سے ثابت ہوتا ہے کہ

$$\left(1 + \sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt[3]{2}} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt[3]{2}}\sqrt{-1}$$

$$\left(1 - \sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt[3]{2}} - \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt[3]{2}}\sqrt{-1}$$

$$\text{پس لا} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt[3]{2}} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt[3]{2}}\sqrt{-1} + \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt[3]{2}} - \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt[3]{2}}\sqrt{-1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt[3]{2}}$$

اور باقی قیمتین دریافت ہوسکتی ہین اور وہ یہہ ہین کہ

$$\frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} \quad \text{اور} \quad -\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$$

(۱۷۱) جو صورت مکعبی مساوات کی ایسی ہو کہ اوسکی تین قیمتین اصلی اور غیر مساوی ہون اوس صورت کو معدوم التحویل کہتی ہین

معدوم التحویل کہتی ہین

اور بعض اوقات یہہ کہتی ہین کہ اس صورت مین قاعدہ کارڈن کا نہین چلتا ان جملون سی یہہ بات معلوم ہوتی ہی کہ جسمین ایسی صورتین نمایان ہوتی ہین کہ اونکی جانچ لگانی مین بڑی دقت اور دشواری عاید ہوتی ہی لیکن ضابطہ جملہ ثنائی کی استعانت سی جملہ ع + ق √−۱ کی صورت کی جملہ کی تقریبی قیمت ہم دریافت کرتی ہین اگر ق تعداداً چھوٹا ع سی ہو تو (ع + ق √−۱)$^{\frac{1}{3}}$ کو سلسلہ انضمامی مین موافق قواعد متصاعدہ ق √−۱ کے پھیلائین جبر مقابلہ ۳۴ باب دیکھو پس

(ع + ق √−۱)$^{\frac{1}{3}}$ کو تقریباً عَ + قَ √−۱ کے صورت مین لا سکتی ہین

اور (ع − ق √−۱)$^{\frac{1}{3}}$ کو تقریباً عَ − قَ √−۱ کی صورت مین

اور مجموعہ ان جزء الکعبون کا ۲ عَ ہوگا لیکن اگر ق تعداداً بڑا ع سی ہو تو ہم اسطرح عمل کرین کہ

ع + ق √−۱ = √−۱ (ق − ع √−۱)

اسی معلوم ہوا کہ (ع + ق √−۱)$^{\frac{1}{3}}$ = (√−۱)$^{\frac{1}{3}}$ (ق − ع √−۱)$^{\frac{1}{3}}$

اب − √−۱ کا جزء الکعب امتحان سی √−۱ معلوم ہوتا ہی پس یہہ حاصل ہوگا

(ع + ق √−۱)$^{\frac{1}{3}}$ = − √−۱ (ق − ع √−۱)$^{\frac{1}{3}}$

اور ہم (ق − ع √−۱)$^{\frac{1}{3}}$ کو سلسلہ انضمامی مین قواعد متصاعدہ ع √−۱ کی پھیلا سکتی ہین اور پھر موافق سابق کی مجموعہ ع + ق √−۱ اور ع − ق √−۱ کا دریافت کر سکتی ہین

یہہ صورت کہ ع = ق کے دفعہ گذشتہ کی دوسرے مثال مین شامل ہی

اس بات پر بھی غور کرنی چاہیئی کہ ضابطہ ڈی موئور کے وساطت سی مقدار ع + ق √−۱ کا جزء الکعب اسی صورت مین بیان ہو سکتا ہے کہ اوسمین علم مثلثی جملے ملتف ہون

(۱۷۲) دفعات گذشتہ سی ظاہر ہوتا ہے کہ مکعبی مساوات لا^{3} + ق لا + ر = ۰ ہمیشہ کارڈس کے عمل سی حل ہو سکتی ہی اور جب ق مساوات مین مثبت ہو تو کچھہ دقت اوسمین نہین واقع ہوتی اور جب ق منفی ہو اور اوسکی ساتھہ ق^{3} تعداداً چھوٹی $\frac{۲۷ ر^{2}}{۴}$ سی ہو تو ان صورتون مین قیمتین خیالی ہونگین اگر ق^{3} ایک منفی مقدار ہو اور تعداداً بڑی $\frac{۲۷ ر^{2}}{۴}$ سی ہو تو کاردن

کے حل مین بڑی دقت ہوتی ہی اور اس صورت مین تمام قیمتین اصلی ہین

اگر ق³ منفی ہو اور تعداد ر² برابر $\frac{4ق^3}{27}$ ہو تو $\frac{ر^2}{4} + \frac{ق^3}{27} = 0$ تو بموجب دفعہ ۶۰ کے

اوسکی قیمتین برابر ہونگین بموجب دفعہ ۱۶۱ کے اس صورت مین $م = ن = \sqrt[3]{-\frac{ر}{2}}$

اور تینون قیمتین ۲م اور −م اور −م ہین

جس صورت مین مکعبی مساوات کی قیمت ایک معلوم ہو جاے تو مکعبی مساوات کا تنزل مساوات درجہ دوم کی طرف کرلین اور اس مساوات درجہ دوم ہی دو قیمتین دریافت کرلین اور دفعات گذشتہ کی ترکیب سے قیمتون کو نہ دریافت کرین

(۱۷۳) کامل مکعبی مساوات کی حل کرتی ہین جو نتایج حاصل ہوتے ہین اوسکا مختصر بیان کرتی ہین فرض کرو کہ مساوات

$$لا^3 + ا لا^2 + ب لا + س = 0$$

مین فرض کرو کہ $لا = ی - \frac{ا}{3}$ تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$+ ی^3 + ق ی + ر = 0$$

اسمین $ق = ب - \frac{ا^2}{3}$ اور $ر = س - \frac{اب}{3} + \frac{2ا^3}{27}$

اب بموجب ترکیب کارڈن کے

$$لا = \left(-\frac{ر}{2} + \sqrt{\frac{ر^2}{4} + \frac{ق^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{ر}{2} - \sqrt{\frac{ر^2}{4} + \frac{ق^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

اسسے یہہ دریافت ہوتا ہے کہ

$$\frac{ر^2}{4} + \frac{ق^3}{27} = \frac{س^2}{4} - \left(\frac{اب}{4} - \frac{ا^3}{27}\right) + \frac{ب^2}{27}\left(ب - \frac{ا^2}{4}\right)$$

(۱۷۴) بعض معادلات مکعبی جسمین مثال کی خاص قیمتین ہون بغیر کارڈن کی ترکیب کے بھی حل ہو سکتی ہین

مثلاً فرض کرو کہ

$$لا^3 + 3لا = ا^3 - \frac{1}{ا^3}$$

اسکو اسطرح لکھہ سکتی ہین کہ

$$لا^3 + 3لا = \left(ا - \frac{1}{ا}\right)^3 + 3\left(ا - \frac{1}{ا}\right)$$

یعنی $لا^۳ - (ا - \frac{۱}{ا})^۳ + ۳ (ا - \frac{۱}{ا}) \left[لا - (ا - \frac{۱}{ا}) \right] = ۰$

اسمین ظاہر ہی کہ ایک قیمت $لا = ا - \frac{۱}{ا}$

اب پھر فرض کرو یہہ مکعبی مساوات کامل ہے کہ

$$لا^۳ + ا لا^۲ + ب لا + س = ۰$$

اور مثال کی درمیان یہہ ارتباط ۲ ا س = ب۲ ہی تو مساوات مفروضہ اسطرح لکھی جائینگی

$$- لا^۳ = ا لا^۲ + ب لا + س$$

اسیواسطے $- ۲ ا ب لا^۳ = ۳ ب ا^۲ لا^۲ + ۳ ب^۲ ا لا + ب^۳$

اسیواسطے $(ا^۳ - ۳ ا ب) لا^۳ = ا^۳ لا^۳ + ۳ ب ا^۲ لا^۲ + ۳ ب^۲ ا لا + ب^۳ = (ا لا + ب)^۳$

اسیواسطے $لا \sqrt[۳]{ا^۳ - ۳ ا ب} = ا لا + ب$

اسیواسطے $لا = \frac{ب}{\sqrt[۳]{ا^۳ - ۳ ا ب} - ا}$

(۱۷۵) علم مثلث مستوی کی ۱۷ باب مین ایکعمل لکھا ہی جسکی کہ ہم مساوات درجہ سوم معدوم التحویل کے قیمتین بذریعہ جداول علم مثلثی کی دریافت کرسکتی ہین یہہ بات عملاً توکسی کام کی نہین ہے لیکن ہم یہہ بتلائینگی کہ علم مثلثی جدولین کسطرح اون مثالون کی حل کرنی مین بھی کام اتی ہین جو صورت معدوم التحویل سی متعلق نہین ہین

فرض کرو کہ $لا^۳ + ق لا + ر = ۰$ لو

$$لا = \left(- \frac{ر}{۲} + \sqrt{\frac{ر^۲}{۴} + \frac{ق^۳}{۲۷}}\right)^{\frac{۱}{۳}} + \left(- \frac{ر}{۲} - \sqrt{\frac{ر^۲}{۴} + \frac{ق^۳}{۲۷}}\right)^{\frac{۱}{۳}}$$

اگر ق مثبت ہی تو فرض کرو کہ $\frac{ق^۳}{۲۷} = \frac{ر^۲}{۴}$ مس۲ بر تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$لا = \left(- \frac{ر}{۲} + \frac{ر}{۲} \text{ قط بر}\right)^{\frac{۱}{۳}} + \left(- \frac{ر}{۲} - \frac{ر}{۲} \text{ قط بر}\right)^{\frac{۱}{۳}}$$

$$= \left(- \frac{ر}{\text{جم بر}}\right)^{\frac{۱}{۳}} \left[\left(\text{جم } \frac{بر}{۲}\right)^{\frac{۲}{۳}} - \left(\text{جب } \frac{بر}{۲}\right)^{\frac{۲}{۳}} \right]$$

اگر ق منفی ہو اور ۴ ق۳ تعداداً چھوٹا ۲۷ ر۲ سی ہو تو فرض کرو $\frac{ق^۳}{۲۷} = - \frac{ر^۲}{۴}$ جب۲ بر تو یہہ حاصل ہوگا

$$لا = \left(- \frac{ر}{۲} + \frac{ر}{۲} \text{ جم بر}\right)^{\frac{۱}{۳}} + \left(- \frac{ر}{۲} - \frac{ر}{۲} \text{ جم بر}\right)^{\frac{۱}{۳}}$$

$$= (1-ر)^{\frac{4}{3}} \left[(جم \tfrac{ت}{3})^{\frac{4}{3}} - (جب \tfrac{2}{3})^{\frac{4}{3}} \right]$$

(۱۷۶) ایک مساوات عظیم تحقیقات ریاضیہ مین کثیر الوقوع ہی اوسپر بحث کرتی ہین گو وہ اس باب کے خاص مطلب سے متعلق نہین ہے

ہم یہہ دعوی کرتی ہین کہ مساوات ح (لا) = ۰ تمام اصلی قیمتین ہونگین اگر ح (لا)

(لا - ا) (لا - ب) (لا - س) - اَ۲ (لا - ا) - بَ۲ (لا - ب) - سَ۲ (لا - س) - ۲ اَ بَ سَ

کو تعبیر کری مساوات کو اسطرح لکھہ سکتی ہین کہ

(لا - ا) [(لا - ب) (لا - س) - اَ۲] - [بَ۲ (لا - ب) + سَ۲ (لا - س) + ۲ اَ بَ سَ] = ۰

فرض کرو کہ اس مساوات درجہ دوم

(لا - ب) (لا - س) - اَ۲ = ۰

کی قیمتین ھ اور ک ہین اور ھ بہ نسبت ک کی کم ہی تو مساوات درجہ دوم کے حل کرنی سی یہہ معلوم ہوگا کہ ھ بڑا ب یا س سی ہی اور ک چھوٹا ب یا س سی ہی متواتر لا کی جگہ ح (لا) مین + ∞ و ھ و ک و - ∞ رکھو تو یہہ نتایج جداگانہ حاصل ہونگے

+ ∞ و - [بَ ۲ (ھ - ب) + سَ ۲ (ھ - س)] ۲ و [بَ ۲ (ب - ک) + سَ ۲ (س - ک)] و - ∞

پس مساوات ح (لا) = ۰ کی تین اصلی قیمتین ایک بڑی بہ نسبت ھ کی اور ایک درمیان ھ اور ک کی اور ایک چھوٹی بہ نسبت ک کے حاصل ہونگین

(۱۷۷) اب دو صورتین ایسی باقی ہین کہ اونکی توضیح اور تشریح زیادہ کرنی چاہی اونکا حل اس اثبات سی نہین ہوتا (۱) جس صورت مین ھ = ک (۲) جسمین ھ اور ک ایک قیمت مکعبی مساوات کے ہو

فرض کرو کہ ھ = ک چونکہ قیمتین مساوات درجہ دوم کی برابر ہین اسلئی یہہ شرط ضرور ہوگی کہ

(ب - س)۲ + ۴ اَ۲ = ۰ اسیواسطے ب = س اور اَ = ۰ اسی معلوم ہوتا ہے کہ س ایک قیمت مکعبی مساوات کی ہوگا اور ح (لا) کو لا - س پورا تقسیم کریگا اور مساوات کو برابر صفر کے لکھنے سے مساوات درجہ دوم کی حاصل ہوگی جسکی اصلی قیمتین ہین

(۲) فرض کرو کہ ھہ اور ک مین سی ایک مثلاً ھہ قیمت مکعبی مساوات کی ہی تو دفعہ ۱۷۶ اکی موافق عمل کرنی سی ثابت ہوتا ہی کہ مکعبی مساوات کی بہی ایک اصلی قیمت چہوٹی ک سی ہے پس اوسکی دو اصلی قیمتین ہین ناگزیر تیسری قیمت بہی اصلی ہوگی اور اسیطرح اگر ک ایک قیمت مکعبی مساوات کی ہو تو ایک اصلی قیمت اوسکی بڑی ہے بنسبت ھہ کی ہوگی اصلی ضرور ہی کہ تیسری قیمت ہے اصلی ہو

(۱۷۸) اب ہم اوس شرط کی تحقیقات کرتی ہین جسکی موافق ھہ یاک ایک قیمت مساوات مکعبی کے ہو

فرض کرو کہ لر ایک قیمت مساوات درجہ دوم اور درجہ سوم کی بہی ہے

چونکہ لر مساوات درجہ دوم کی ایک قیمت ہے اصلی

(لر-ب) (لر-س) - ا۲ = ۰ (۱)

اور چونکہ لر مساوات مکعبی کی بہی قیمت فرض کی گئی ہی اصلی یہہ حاصل ہوگا کہ

ب۲ (لر-ب) + س۲ (لر-س) + ۲ ا ب س = ۰ (۲)

(۱) اور (۲) سے یہہ مستنبط ہوتا ہے کہ

ب۲ (لر-ب) + س۲ (لر-س) + ۲ ب س √(لر-ب) (لر-س) = ۰

یعنی [ب √(لر-ب) + س √(لر-س)]۲ = ۰

اسیواسطی ب۲ (لر-ب) = س۲ (لر-س) (۳)

(۲) اور (۳) سے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

لر-ب = - ا س/ب اور لر-س = - ا ب/س (۴)

اور اسیواسطے ب - ا س/ب = س - ا ب/س (۵)

اسی ثابت ہوا کہ مکعبی مساوات کی امثال مین ارتباط (۵) ہونا چاہی تاکہ مساوات درجہ دوم کی قیمتون مین سی ایک قیمت مکعبی مساوات کی ایک قیمت ہو بالعکس اسکی اگر (۵) مستحکم ہو تو (۴) سی تحقیق کرکے لر کے واسطی ایک قیمت مقرر کرین تو دونو مساوات (۱) اور (۲) کی شرائط پوری ہوجائینگی پس مساوات درجہ دوم اور مساوات درجہ سوم کے

ایک قیمت مشترک ہوجائیگی

(۱۷۹) مساوات مکعبی کی قیمتون کی برابر ہونی کی شرائط ہم تحقیق کرتے ہین
اگر ھ اور ک مین سی کوئی ایک ہی قیمت مکعبی مساوات کی نہ ہو تو دفعہ ۱۷۶ کی اثبات سی معلوم ہوتا ہے کہ
مساوات مکعبی کی قیمتین غیر مساوی ہین دفعہ ۱۷۶ کا عمل ان دو درجہ دوم کی مساواتون مین سے ہر ایک پر

$$(لا - س)(لا - ا) - ب'^2 = 0 \quad یا \quad (لا - ا)(لا - ب) - س'^2 = 0$$

بجای مساوات درجہ دوم $(لا - ب)(لا - س) - ا'^2 = 0$ کے چل سکتا ہے
اسی ثابت ہوتا ہی کہ مکعبی مساوات کی برابر قیمتین نہین ہوسکتین جب تک اسکی اور ان درجہ دوم کی
مساواتون مین سی ایک مساوات کی قیمت مشترک نہ ہو
اسی ثابت ہوا کہ مساوات (۵) سی شرائط لابدی مساوات مکعبی کی برابر قیمتون کے واسطی یہہ حاصل ہونگین

$$ا - \frac{ب' س'}{ا'} = ب - \frac{س' ا'}{ب'} = س - \frac{ا' ب'}{س'}$$

بالعکس اسکی اگر یہہ شرائط استحکام ہون تو مساوات مکعبی کی قیمتین برابر ہونگین دلیل اسکی یہہ ہے
کہ ان برابر مقادیر کو ر سے تعبیر کرو

تو $ا = ر + \frac{ب' س'}{ا'}$ اور $ب = ر + \frac{س' ا'}{ب'}$ اور $س = ر + \frac{ا' ب'}{س'}$

ا اور ب اور س کی جگہ ان قیمتون کو مکعبی مساوات مین مندرج کرو تو

$$(لا - ر)^3 - (لا - ر)^2 \left(\frac{ب' س'}{ا'} + \frac{س' ا'}{ب'} + \frac{ا' ب'}{س'}\right) = 0$$

پس قیمت ر مکرر آتی ہے اور اور قیمت یہہ ہے کہ

$$ر + \frac{ب' س'}{ا'} + \frac{س' ا'}{ب'} + \frac{ا' ب'}{س'}$$

تیرہوان باب معادلات درجہ چہارم

(۱۸۰) معادلات درجہ چہارم کی حل کرنی کی بعض ترکیبین ہم بیان کرتے ہین
اور سب دلیل کی موافق کہ دفعہ ۱۶۵ مین بیان ہوئی ہم مساوات درجہ چہارم کو بغیر دوسری رقم
کی فرض کرتی ہین اول حل جسکا ہم بیان کرینگے دس کارٹیس کا حل کہلاتا ہے

(۱۸۱) مساوات لا^۴ + ق لا^۲ + رلا + ص = ۰ کو حل کرو

فرض کرو لا^۴ + ق لا^۲ + رلا + ص = (لا^۲ + ھ لا + ف) (لا^۲ − ھ لا + گ)

اب ہم کو اس بات بتلانا چاہئی کہ مقادیر ھ و ف و گ کو کس طرح دریافت کر سکتی ہین بائین طرف جو اجزاء ضربی لکھی ہین اونکو باہم ضرب دو اور دونو ارکان کی امثال لا کے یکسان قوتون کے اسمین برابر لکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

گ + ف − ھ^۲ = ق اور ھ (گ − ف) = ر اور گ ف = ص

یعنی گ + ف = ق + ھ^۲ اور گ − ف = ر/ھ اور گ ف = ص

ان مساواتون مین سی اول اور دوم مساوات سی گ اور ف کو ھ کی ارقام مین دریافت کر کے تیسرے مساوات مین مندرج کرو تو

(ق + ھ^۲ + ر/ھ) (ق + ھ^۲ − ر/ھ) = ۴ص

تحویل اور اختصار کرنی سی اس مساوات سی یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

ھ^۶ + ۲ق ھ^۴ + (ق^۲ − ۴ص) ھ^۲ − ر^۲ = ۰

اس مساوات کو ھ^۲ دریافت کرنی کی واسطی ہم مساوات مکعبی سمجہہ سکتی ہین اور ہم کو یقینی ایک حقیقی مثبت قیمت بموجب دفعہ ۲۰ کی حاصل ہوگی پس جب ھ^۲ ہم کو معلوم ہوگیا تو اوسی ھ معلوم ہوگا اور پھر گ اور ف معلوم ہو جائینگے پس جملہ لا^۴ + ق لا^۲ + رلا + ص دو حقیقی اجزاء ضربی مین تحلیل ہو جائیگا اور ہم کو مساوات درجہ چہارم کی چارون قیمتین ان درجہ دوم کی مساواتون کی حل کرنی سی حاصل ہو جائینگی

لا^۲ + ھ لا + گ = ۰ اور لا^۲ − ھ لا + گ = ۰

(۱۸۲) یہہ بات غور طلب ہی کہ ہم نی دو اجزاء ضربی جو درجہ دوم کی فرض کئی ہین اونمین سی ایک مین رقم ھ لا فرض کی ہی اور دوسرے مین − ھ لا اور دلیل اسکی یہہ ہی کہ جس جملہ کی ہم تحلیل اجزاء ضربی درجہ دوم مین کرنا چاہتی ہین اوسمین رقم لا^۳ کی ملتف نہین ہی اب دوسری مساوات درجہ دوم کی جو آخر مین دفعہ بالا کی لکھی ہی اوسکی دونو قیمتون کا مجموعہ ھ ہی اصلی مساوات

درجہ چہارم مفروضہ کی دو قیمتون کا مجموعہ صہ ہی اور مساوات درجہ چہارم کی چار قیمتون مین سی دو دو کو $\frac{۴ \times ۳}{۱ \times ۲}$ طرح سی لیعنی ۶ طرح سی منتخب کر سکتی ہین اور اسی دلیل سی مساوات صہ کی چھہ درجہ کی حاصل ہوتی ہی لیکن اس سبب سی کہ موافق دفعہ ۴۵ کے مساوات درجہ چہارم کی چارون قیمتون کا مجموعہ صفر ہی اپنی مجموعہ دو قیمتون کا متحد المقدار اور مختلف العلامت باقی دو مقدارون کے مجموعہ کا ہوگا پس اسی دلیل اس بات کی معلوم ہوئی کہ مساوات مین صہ کی بھی قوا سطرح ملتف ہوتی ہین کہ صہ کی قیمتین مکعبی مساوات کی حل کرنی سی دریافت ہوجاتی ہین جب صہ^۲ ہم کو دریافت ہوجاوے توہم کو اوسکی جذر نکالنی سی جو دو قیمتین مختلف العلامت دریافت ہونگی اونمین سی ہر ایک کو کام مین لا سکتی ہین اسواسطی کہ صہ کی مختلف علامتون کی کام مین لانی سی قیمتین ق اور گہ کی فقط آپسمین بدل جائینگے اور اس تبدل سی اثر اون نتایج پر کچھہ نہین ہوگا جو مساوات درجہ چہارم کے حل کرنے مین کام آتے ہین

(۱۸۳) مثلاً فرض کرو کہ $لا^۴ - ۱۰ لا^۲ - ۲۰ لا - ۱۶ = ۰$ یہان ق = -۱۰ اور ر = -۲۰ اور ص = -۱۶ مساوات مکعبی صہ^۲ کی یہہ حاصل ہوگی کہ $صہ^۶ - ۲۰ صہ^۴ + ۱۶۴ صہ^۲ - ۴۰۰ = ۰$ اور ایک قیمت اسکی صہ^۲ = ۴ ہی دفعہ ۱۱۹ دیکھو پس صہ = ۲ تو ق = ۲ اور گہ = -۸ اسیواسطے

$$لا^۴ - ۱۰ لا^۲ - ۲۰ لا - ۱۶ = (لا^۲ + ۲ لا + ۲)(لا^۲ - ۲ لا - ۸)$$

پس مساوات مفروضہ درجہ چہارم کی یہہ چار قیمتین دریافت ہونگین

۴ و -۲ و $-۱ + \sqrt{-۱}$ اور $-۱ - \sqrt{-۱}$

(۱۸۴) پس اوپر کی بیان سی ظاہر ہوتا ہی کہ مساوات درجہ چہارم کا حل موقوف ایک مساوات مکعبی کے استعانت پر موقوف ہی اسواسطی اس امر کا دریافت کرنا ایک بڑی بات ٹھہری کہ یہہ مکعبی مساوات کب صورت معدوم التحویل رکھتی ہی دفعہ ۱۷۱ دیکھو اس نئے موقع اس دعوی کی ثابت کرنی کا پتہ لگتا ہی کہ اگر مساوات درجہ چہارم کی دو حقیقی قیمتین اور دو خیالی قیمتین ہون تو مساوات مکعبی مستعان کی کبھی صورت معدوم التحویل نہین واقع ہوگی

دلیل۔ فرض کرو کہ مساوات درجہ چہارم کی خیالی قیمتیں سہ + صہ √-۱ اور سہ - صہ √-۱ سے تعبیر ہوں تو اس سبب سے کہ چاروں قیمتوں کا مجموعہ صفر ہی تو حقیقی قیمتیں - سہ + لر اور - سہ - لر کی ہونگیں ان قیمتوں سی ہر زوج کے مجموعہ سے یہہ جملے حاصل ہونگے کہ

± ۲ سہ و ± (لر ± صہ √-۱) اور ± (لر - صہ √-۱)

پس تین قیمتیں ھہ^۲ کی یہہ ہونگیں (۲ سہ)^۲ اور (لر + صہ √-۱)^۲ اور (لر - صہ √-۱)^۲

اگر لر صفر نہ ہو تو ھہ^۲ کے ان قیمتوں میں سی دو خیالی ہونگیں اور اگر لر صفر ہو تو ھہ^۲ کی تمام قیمتیں حقیقی ہونگیں لیکن اونمیں سے دو برابر ہین اسلئی مکعبی مساوات ھہ^۲ کی صورت معدوم التحویل نہین ہو گی

(۱۸۵) اگر مساوات درجہ چہارم کی تمام حقیقی قیمتیں ہوں تو مساوات مکعبی مستعان کی قیمتیں بہی تمام حقیقی ہونگیں اور اگر مساوات درجہ چہارم کی تمام خیالی قیمتیں ہوں تو وہ ان

سہ ± صہ √-۱ اور - سہ ± لر √-۱ کی ہونگیں ان قیمتوں میں سی ہر زوج کے مجموعہ سی یہہ جملی حاصل ہونگی کہ ± ۲ سہ و ± (صہ + لر) √-۱ اور ± (صہ - لر) √-۱

پس قیمتیں ھہ^۲ کی ۴ سہ^۲ اور - (صہ + لر)^۲ اور - (صہ - لر)^۲ ہین اسلئی سب حقیقی قیمتیں ہین

اسی معلوم ہوا کہ اگر مساوات درجہ چہارم کی تمام حقیقی قیمتیں ہوں یا خیالی قیمتیں ہوں تو مکعبی مساوات مستعان اکثر معدوم التحویل ہو گی ہم نی جو یہہ لکہا ہی کہ مساوات اکثر معدوم التحویل ہو گی تو اسکا سبب یہہ ہی کہ ممکن ہے کہ مساوات مکعبی کی دو قیمتیں برابر ہوں تو پہر اوس وقت وہ معدوم التحویل نہین ہونگے

(۱۸۶) ہم نی اوپر کی دو دفعوں میں یہہ بتلایا ہی کہ مساوات مکعبی مستعان کی قیمتوں کے صورتیں موافق مساوات مفروضہ درجہ چہارم کی قیمتوں کے کیا ہونگیں اب ہم اوسکی بالعکس لکہتی ہین کہ مساوات مفروضہ درجہ چہارم کی قیمتوں کی صورتیں موافق مساوات مکعبی مستعان کے قیمتوں کے کیا ہونگیں چونکہ مساوات مکعبی کی اخر رقم منفی ہی اسلئی ایک قیمت مثبت ہو گی اور چونکہ بموجب دفعہ ۱۸۵ کے حاصل ضرب قیمتوں کا مثبت ہی تو یہہ صورتیں واقع ہونگیں (۱) تمام قیمتیں مثبت ہوں (۲) ایک مثبت

ہوا اور دو منفی ہون (۳) ایک مثبت قیمت اور دو خیالی قیمتین تو بموجب دفعات ۱۸۴ اور ۱۸۵ کے نتایج مفصلہ ذیل حاصل ہونگے

(۱) اگر مساوات مکعبی کی تمام قیمتین مثبت ہون تو مساوات درجہ دوم کی تمام قیمتین حقیقی ہونگین

(۲) اگر مساوات مکعبی کی ایک مثبت قیمت ہوا اور دو منفی قیمتین تو مساوات درجہ چہارم کے دو قیمتین حقیقی اور دو قیمتین خیالی ہونگین یا چارون قیمتین خیالی ہونگین

(۳) اگر مکعبی مساوات کی ایک مثبت قیمت ہوا اور دو خیالی قیمتین تو مساوات درجہ چہارم کی دو حقیقی قیمتین اور دو خیالی قیمتین ہونگین

(۱۸۷) مساوات درجہ چہارم کی چارون قیمتین بہت سادگی کی ساتھ مکعبی مساوات مستعان کی قیمتون مین بیان ہو سکتی ہین

فرض کرو کہ $ھ^۲$ کی تین قیمتین $س^۲$ اور $ص^۲$ اور $ل^۲$ سی تعبیر ہون جو اس مساوات سی حاصل ہوتی ہین کہ

$$ھ^۶ + ۲ق\,ھ^۴ + (ق^۲ - ۴ص)\,ھ^۲ - ر^۲ = ۰$$

تو بموجب دفعہ ۴۵ کے یہہ حاصل ہوتا ہی کہ $ر^۲ = س^۲ ص^۲ ل^۲$ اور
$-۲ق = س^۲ + ص^۲ + ل^۲$ پس $ر = س\,ص\,ل$ رکھین اور ھ کی قیمت س لین تو

$$لا^۲ + ھ\,لا + ف = لا^۲ + س\,لا + \frac{۱}{۲}\left(ق + س^۲ - \frac{ر}{س}\right)$$

$$= لا^۲ + س\,لا + \frac{۱}{۲}\left(س^۲ - ص^۲ - ل^۲ - ۲\,ص\,ل\right)$$

اسواسطے مساوات $لا^۲ + ھ\,لا + ف = ۰$ کے حل کرنی سی ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$لا = \frac{۱}{۲}(-س - ص - ل) \quad یا \quad لا = \frac{۱}{۲}(-س + ص + ل)$$

اسطرح مساوات $لا^۲ - ھ + ف = ۰$ کے حل کرنے سے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہی کہ

$$لا = \frac{۱}{۲}(س - ص + ل) \quad یا \quad لا = \frac{۱}{۲}(س + ص - ل)$$

پس مساوات درجہ چہارم کی یہہ چار قیمتین حاصل ہونگین کہ

$$\frac{۱}{۲}(-س - ص - ل) \; و \; \frac{۱}{۲}(-س + ص + ل) \; و \; \frac{۱}{۲}(س - ص + ل) \; و \; \frac{۱}{۲}(س + ص - ل)$$

(۱۸۸) ایک اور ترکیب مساوات درجہ چہارم کی حل کرنی کی مختلف مہندسین نے لکھی ہی اونمین کچھہ تھوڑا ہی فرق ہے

اوراس ترکیب کا نام کبھی تو فریری کی ترکیب کبھی وارنگ کی ترکیب اور کبھی سمپسن کی ترکیب رکھا جاتا
ہے اب ہم اوسکو بیان کرتے ہین
فرض کرو مساوات درجہ چہارم کی یہہ ہوکہ

$$لا^{۴} + ۲ع\,لا^{۳} + ق\,لا^{۲} + ۲ر\,لا + ص = ۰$$

طرفین پر ا لا^۲ + ب لا + س زیادہ کرو اور ا اور ب اور س کو ایسا معین کرو کہ ہر طرف مساوات
کی مربع کامل بنجای تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$لا^{۴} + ۲ع\,لا^{۳} + (ق + ا)\,لا^{۲} + (ر + ب)\,لا + ص + س = ا\,لا^{۲} + ب\,لا + س$$

بائین طرف کا رکن مساوات مجذور کامل ہوگا اگر $ب^{۲} = ۴ا\,س$ کے ہو دائین طرف کی رکن کو
فرض کرو کہ وہ برابر

$$(لا^{۲} + \frac{ع\,لا}{۲} + م)^{۲}$$

کے ہو تو امثال کے مقابلہ کرنے سے یہہ حاصل ہوگا کہ

$$۲م + \frac{ع^{۲}}{۴} = ق + ا \quad اور \quad ع\,م = ر + ب \quad اور \quad م^{۲} = ص + س$$

یہہ تین ارتباط ا اور ب اور س کو ارقام م مین بیان کرتی ہین ا اور ب اور س کی قیمتون کو
مساوات $ب^{۲} = ۴ا\,س$ مین مندرج کرنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$(ع\,م - ر)^{۲} = ۴\,(۲م + \frac{ع^{۲}}{۴} - ق)\,(م^{۲} - ص)$$

اس مکعبی مساوات سی م دریافت ہوگا اور پہر اوسسے ا اور ب اور س معلوم ہونگی اور چونکہ یہہ ہم کو حاصل ہی کہ

$$(لا^{۲} + \frac{ع\,لا}{۲} + م)^{۲} = ا\,لا^{۲} + ب\,لا + س = ا\,لا^{۲} + ب\,لا + \frac{ب^{۲}}{۴ا}$$

اسی ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہی کہ $لا^{۲} + \frac{ع\,لا}{۲} + م = \pm \frac{۲ا\,لا + ب}{۲\sqrt{ا}}$
پس ہم کو دو مساواتین درجہ دوم کی حل کرنی پڑینگے یعنی

$$لا^{۲} + \frac{ع\,لا}{۲} + م + \frac{۲ا\,لا + ب}{۲\sqrt{ا}} = ۰ \quad اور \quad لا^{۲} + \frac{ع\,لا}{۲} + م - \frac{۲ا\,لا + ب}{۲\sqrt{ا}} = ۰$$

(۱۸۹) یہان یہہ ثابت ہو سکتا ہی کہ اس ترکیب مین جس مکعبی مساوات مستعان کی حل کرنی کا

کام ہم کو پڑتا ہی وہ اکثر معدوم التحویل ہوگی بشرطیکہ مساوات درجہ چہارم کی دو حقیقی قیمتین اور دو خیالی قیمتین نہ ہون **دلیل** فرض کرو کہ مساوات مفروضہ درجہ چہارم کی چار قیمتون کو سہ وصہ ولر وفر تعبیر کرتی ہین تو دفعہ ۱۸۸ مین دو مساواتین درجہ دوم کی حاصل ہوئین ہین اون پر خیال کرنی سی یہہ نتیجہ پیدا ہوتا ہی کہ $\text{م} + \frac{\text{ب}}{\text{۲ طا}}$ برابر چارون مقادیر سہ وصہ ولر وفر مین سی دو کی حاصل ضرب کے ہو اور $\text{م} - \frac{\text{ب}}{\text{۲ طا}}$ باقی دو کے حاصل ضرب کے ہو پس فرض کرو کہ

$$\text{م} + \frac{\text{ب}}{\text{۲ طا}} = \text{سہ صہ} \quad \text{اور} \quad \text{م} - \frac{\text{ب}}{\text{۲ طا}} = \text{لر فر}$$

$$\text{پس م} = \tfrac{1}{2}\left(\text{سہ صہ} + \text{لر فر}\right)$$

پس یہان قرینہ سی یہہ نتیجہ مستنبط کرتی ہین کہ م کی دو اور قیمتین $\tfrac{1}{2}(\text{سہ لر} + \text{صہ فر})$ اور $\tfrac{1}{2}(\text{سہ فر} + \text{صہ لر})$ ہونگین

یہہ ظاہر ہی کہ اگر سہ وصہ ولر وفر تمام حقیقی قیمتین ہون تو م کی یہہ تینون قیمتین حقیقی ہونگین اور اگر تمام سہ وصہ ولر وفر تمام خیالی ہون تو بہی تینون قیمتین حقیقی ہونگین لیکن اگر چارون قیمتون مین سی دو خیالی اور دو حقیقی قیمتین ہون تو یہہ نتیجہ نکلی گا کہ م کی دو قیمتین خیالی ہین اور ایک حقیقی یا اونکی تمام حقیقی قیمتین ہین اور دو اونمین سی برابر ہین

(۱۹۰) اب ہم یولر کی ترکیب مساوات درجہ چہارم کی حل کرنی کی لکہتی ہین فرض کرو کہ مساوات یہہ ہی

$$\text{لا}^{4} + \text{ق لا}^{2} + \text{ر لا} + \text{ص} = 0$$

فرض کرو کہ $\text{لا} = \text{د} + \text{ی} + \text{ھ}$ پس

$$\text{لا}^{2} = \text{د}^{2} + \text{ی}^{2} + \text{ھ}^{2} + 2(\text{دی} + \text{ی ھ} + \text{ھ د})$$

$$\text{یعنی لا}^{2} - \text{د}^{2} - \text{ی}^{2} - \text{ھ}^{2} = 2(\text{دی} + \text{ی ھ} + \text{ھ د})$$

طرفین کا مجذور کرو تو

$$\text{لا}^{4} - 2\,\text{لا}^{2}(\text{د}^{2} + \text{ی}^{2} + \text{ھ}^{2}) + (\text{د}^{2} + \text{ی}^{2} + \text{ھ}^{2})^{2} = 4(\text{دی} + \text{ی ھ} + \text{ھ د})^{2}$$

$$= 4(\text{د}^{2}\text{ی}^{2} + \text{ی}^{2}\text{ھ}^{2} + \text{ھ}^{2}\text{د}^{2}) + 8\,\text{د ی ھ}(\text{د} + \text{ی} + \text{ھ})$$

د + ی + ھ کی جگہ لا کو رکھو اور منتقل کرو تو

$$\text{لا}^4 - 2\,\text{لا}^2(\text{د}^2 + \text{ی}^2 + \text{ھ}^2) - 8\,\text{لا د ی ھ} + (\text{د}^2 + \text{ی}^2 + \text{ھ}^2)^2 - 4(\text{د}^2\text{ی}^2 + \text{ی}^2\text{ھ}^2 + \text{ھ}^2\text{د}^2) = 0$$

تاکہ اس مساوات کی مساوات مفروضہ درجہ چہارم کی ساتھہ تطبیق ہو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{ق} = -2(\text{د}^2 + \text{ی}^2 + \text{ھ}^2) \quad \text{اور} \quad \text{ر} = -8\,\text{د ی ھ}$$

$$\text{ص} = (\text{د}^2 + \text{ی}^2 + \text{ھ}^2)^2 - 4(\text{د}^2\text{ی}^2 + \text{ی}^2\text{ھ}^2 + \text{ھ}^2\text{د}^2)$$

$$\text{پس} \quad \text{د}^2 + \text{ی}^2 + \text{ھ}^2 = -\frac{\text{ق}}{2}$$

$$\text{د}^2\text{ی}^2 + \text{ی}^2\text{ھ}^2 + \text{ھ}^2\text{د}^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{\text{ق}^2}{4} - \text{ص}\right) = \frac{\text{ق}^2 - 4\,\text{ص}}{16}$$

$$\text{د}^2\text{ی}^2\text{ھ}^2 = \frac{\text{ر}^2}{64}$$

اسیواسطے موافق دفعہ ۸۵ کی $\text{د}^2 + \text{ی}^2$ اور ھ^2 قیمتیں ط کی ہیں جو اس مکعبی مساوات سے حاصل ہوتے ہیں کہ:

$$\text{ط}^3 + \frac{\text{ق}}{2}\text{ط}^2 + \frac{\text{ق}^2 - 4\,\text{ص}}{16}\text{ط} - \frac{\text{ر}^2}{64} = 0$$

فرض کرو کہ اس مساوات کی قیمتیں ط_1 اور ط_2 اور ط_3 سی تعبیر ہوتی ہیں تو

$$\text{د} = \pm\sqrt{\text{ط}_1} \quad \text{اور} \quad \text{ی} = \pm\sqrt{\text{ط}_2} \quad \text{اور} \quad \text{ھ} = \pm\sqrt{\text{ط}_3}$$

اگر ان قیمتوں کو جملہ لا یعنی د + ی + ھ میں مندرج کریں تو آٹھہ مختلف نتیجے بسبب اشتباہ علامات کے پیدا ہونگی لیکن یہہ سب نتایج داخل ہونی کی قابل نہیں ہیں اسواسطے کہ ہم کو یہہ ہی حاصل ہو چکا ہے کہ $\text{د ی ھ} = -\frac{\text{ر}}{8}$ پس د اور ی اور ھ کی حاصل ضرب کے علامت متضاد علامت ر کی ہو

اگر ہم فرض کریں کہ ر مثبت تو لا کی وہ قیمتیں جو مساوات میں داخل ہونی کی قابلیت رکھتے ہیں ہونگیں

$$-\sqrt{\text{ط}_1} - \sqrt{\text{ط}_2} - \sqrt{\text{ط}_3} \;\text{اور}\; -\sqrt{\text{ط}_1} + \sqrt{\text{ط}_2} + \sqrt{\text{ط}_3} \;\text{و}\; \sqrt{\text{ط}_1} - \sqrt{\text{ط}_2} + \sqrt{\text{ط}_3} \;\text{و}\; \sqrt{\text{ط}_1} + \sqrt{\text{ط}_2} - \sqrt{\text{ط}_3}$$

اگر ہم ر کو منفی فرض کریں تو لا کی یہہ قیمتیں مساوات میں داخل ہونی کی قابلیت رکھنی والی حاصل ہونگیں

$$\sqrt{\text{ط}_1} + \sqrt{\text{ط}_2} + \sqrt{\text{ط}_3} \;\text{و}\; \sqrt{\text{ط}_1} - \sqrt{\text{ط}_2} - \sqrt{\text{ط}_3} \;\text{و}\; -\sqrt{\text{ط}_1} + \sqrt{\text{ط}_2} - \sqrt{\text{ط}_3} \;\text{و}\; -\sqrt{\text{ط}_1} - \sqrt{\text{ط}_2} + \sqrt{\text{ط}_3}$$

(۱۹۱) دلیل اس بات کی کہ کیوں آٹھہ قیمتیں لا کی دفعہ گذشتہ میں پیدا ہوتی ہیں یہہ ہی کہ ارتباط

ی ھ = $-\frac{ر}{۸}$ کا مجذور کیا گیا تھا اور وہ عمل مین اس صورت ی ۲ ی ھ^{۲} = $\frac{ر^{۲}}{۶۴}$ مین کام آیا تھا پس اس سبب سے کہ ارتباط دوسرے صورت مین علامت ر کی تبدل سی نہین بدلتا تو عمل مین فی الحقیقت قیمتین مساوات درجہ چہارم $لا^{۴}$ + ق $لا^{۲}$ − رلا + ص = ۰ اور نیز مساوات درجہ چہارم $لا^{۴}$ + ق $لا^{۲}$ + رلا + ص = ۰ کی کام مین اتی ہین یعنی اصلی چار کی اٹھہ قیمتین ہوجاتے ہین دفعہ ۱۸۱ کی مکعبی مساوات مستعان دفعہ ۱۹۰ کی مکعبی مساوات سی تطبیق ہوجائیگی اگر ھ^{۲} = ۴ط کے فرض کرین پس دفعات ۱۸۴ − ۱۸۶ تک مین جو مساوات مکعبی مستعان اور مساوات مفروضہ درجہ چہارم کے قیمتون کے ارتباط اور وہ صورتین جو مساوات کو معدوم التحویل بناتی ہین لکھی ہین وہ جیسی کہ ڈس کاٹرٹیس کی ترکیب سے متعلق ہین ایسی ہی بومر کی ترکیب سی بھی متعلق ہین

(۱۹۲) حل خاص صورت کی مساوات درجہ چہارم کا بہ نسبت عام صورت مساوات درجہ چہارم کے بہت اسان ہوتا ہے مثلاً یہہ مساوات درجہ چہارم

$$لا^{۴} + ع\,لا^{۳} + ق\,لا^{۲} + ر\,لا + ص = ۰$$

مساوات درجہ دوم کی طرح حل ہوسکتی ہی اگر ع^{۳} − ۴ع ق + ۸ر = ۰ کے اسواسطی کہ مساوات $لا^{۴}$ + ع $لا^{۳}$ + ق $لا^{۲}$ + رلا + ص = ۰ کو اسطرح لکھہ سکتی ہین کہ

$$لا^{۲}\left(لا + \frac{ع}{۲}\right)^{۲} + \left(ق - \frac{ع^{۲}}{۴}\right) لا \left(لا + \frac{ر}{ق - \frac{ع^{۲}}{۴}}\right) + ص = ۰$$

اور یہہ مساوات درجہ دوم کی طرح حل ہوسکتی ہی اگر $\frac{ر}{ق - \frac{ع^{۲}}{۴}} = \frac{ع}{۲}$ کے ہو یعنی اگر ع^{۳} − ۴ع ق + ۸ر

چودہوان باب سٹرم صاحب کا ضابطہ

(۱۹۳) ابواب گذشتہ مین ہم نی معادلات کی قیمتون کی مسائل اور تیسری اور چوتھی درجہ کی مساواتون کی حل کرنی کی ترکیبین لکھین ہین مگر اب ہم ایک اور ہی مضمون لکھتی ہین یعنی معادلات کی عددی تقریبی قیمتین کن ترکیبون اور حکمتون سی دریافت ہوتی ہین اغاز اس مضمون کا سٹرم صاحب کی ضابطہ سی ہوتا ہی اول اس ضابطہ کو ثابت کرتے ہین اوسکا مطلب یہہ ہے

کا ایک مساوات کی قیمتوں کا مقام اور تعداد حقیقی قیمتوں کی تشخیص ہو جاے

دفعہ اینده مین اس ضابطہ کو ثابت کیا ہی اور بہر تجزیہ او کیفیتیں اس ضابطہ کی لکہی ہین او ر اجزاے ازان کے موافق مثالوں کو حل کیا ہے

(۱۹۴) **سٹرم صاحب کا ضابطہ** فرض کرو کہ ح (لا) = ۰ مساوات ہو جسمین مساوی قیمتین خارج ہو گئی ہین اور ح (لا) کا اول جملہ مشتقہ ح۱ (لا) ہو اور پہر ح (لا) اور ح۱ (لا) پر عمل وفق اعظم دریافت کرنی کا کیا گیا ہو مگر اوسمین یہہ ترمیم اور کی گئی ہو کہ جو باقی تقسیم کی اندر بچی ہو اوسکی علامتین بدل دی گئین ہوں اور پہر وہ باقی مقسوم علیہ بنائی گئی ہو اور یہہ عمل جب تک جاری رہا ہو کہ ایک باقی ایسی حاصل ہو کہ اوسکو کچہہ لگاو لاسی نہ ہو اور اس باقی کی ہی علامتین بدلی گئی ہوں فرض کرو کہ اسطرح جو باقیات ترمیم شدہ حاصل ہون وہ اس سلسلہ ح۲ (لا) و ح۳ (لا) ۰۰۰ حم (لا) سی تعبیر ہون فرض کرو کہ سہ کوی مقدار ہو اور صہ ایک اور مقدار ہو جو ازروی جبر مقابلہ بڑی سہ سی ہو تو مساوات ح (لا) = ۰ کی حقیقی قیمتون کی تعداد درمیان سہ اور صہ کی برابر اوس زیادتی کی ہوگی جو سلسلہ ح (لا) اور ح۱ (لا) اور ح۲ (لا) ۰۰۰ حم (لا) کی تغیرات علامت کی تعداد کو اوس حالت مین کہ لا = سہ کی ہو اوس تعداد تغیرات علامت پر اس سلسلہ کی حاصل ہی کہ جب لا = صہ کے ہو

تمام سلسلہ ح (لا) و ح۱ (لا) و ح۲ (لا) ۰۰۰ حم (لا) کو سٹرم کے جملے کہتے ہین اور سلسلہ ح۱ (لا) و ح۲ (لا) ۰۰۰ حم (لا) کو مستعان جملے کہتی ہین مستعان جملی وہی ہین جو سٹرم کے جملی ہین مگر اونمین سی ح (لا) خارج ہے

فرض کرو کہ ق۱ و ق۲ ۰۰۰ قم-۱ متواتر خارج قسمتوں کو جو عمل مذکور سی پیدا ہوتی ہین تعبیر کرتے ہین تو یہہ ارتباطات حاصل ہونگے

$$ح (لا) = ق_۱ ح_۱ (لا) - ح_۲ (لا)$$

$$ح_۱ (لا) = ق_۲ ح_۲ (لا) - ح_۳ (لا)$$

$$ح_۲ (لا) = ق_۳ ح_۳ (لا) - ح_۴ (لا)$$

$$ح_{م-۲} (لا) = ق_{م-۱} ح_{م-۱} (لا) - ح_م (لا)$$

اب ان ارتباطات سی تین نتیجی استخراج کرتے ہین

اول اخر جملہ ح م (لا) صفر نہین ہی اسواسطی کہ بموجب فرض کے اوسکو کچہہ تعلق لاسی نہین ہے اگر وہ صفر ہو تو ح (لا) اور ح ۱ (لا) کا چاہیی کوئی وفق مشترک ہو اور بموجب دفعہ ۵۷ کے مساوات ح (لا) =۰ کی برابر قیمتین ہونی چاہیی اور یہہ خلاف فرض کے ہے

دوم دو متصل کی جملی ستعان ایک ہی وقت مین معدوم نہین ہوسکتی اسواسطے کہ وہ معدوم ہون تو بہر اونکی اگی کی جملی بہی معدوم ہون چنانچہ ح م (لا) بہی داخل ہو اور یہہ بموجب اول نتیجہ کی ناممکن ہے

سوم جب ایک جملہ معدوم ہوتا ہی تو اوسکی متصل کی طرفین جملون کی علامتین متضاد ہوتی ہین مثلاً فرض کرو ح ۲ (لا) =۰ تو نظم ارتباطات کی تیسری ارتباط سی ح ۱ (لا) = - ح ۳ (لا) حاصل ہوگا

اب کوئی سٹرم کی جملون مین کسی جملہ کی اندر علامت کا تبدل نہین ہوسکتا الا اوس صورت مین کہ لا کی نوبت اوس قیمت پر پہونچی کہ وہ اوس جملی کو معدوم کردی اور اب ہم یہہ ثابت کرینگی کہ جب لا کی نوبت اوس قیمت پر پہونچتی ہی کہ وہ ح (لا) کو معدوم کردی تو سٹرم کی جملون مین ایک تغیر علامت گم ہوجاتا ہے اور اس سبب سی کہ لا کی نوبت اوس قیمت پر پہونچی کہ وہ کسی ایک جملہ ستعان کو معدوم کردے تو کوئی تغیر علامت نہ گم ہوتا ہے نہ پیدا ہوتا ہے

اول فرض کرو کہ س ایک قیمت مساوات ح (لا) =۰ کی ایسی ہو کہ ح (س) =۰

فرض کرو کہ ھ ایک مثبت مقدار ہو اب بموجب دفعہ ۱۰ کی ح (س - ھ) قوای ھ مین پہیل سکتا ہے اور بموجب دفعہ ۱۴ کی ھ ایسا چہوٹا مقرر ہوسکتا ہی کہ تمام سلسلہ کی وہی علامت ہو جو اول رقم کی علامت ہو جو ۰ ... روم نہین ہوتی یعنی علامت ح (س - ھ) کی وہی ہو جو علامت - ھ ح ۱ (س) کی ہے کیونکہ ح (س) =۰ اور علامت ح ۱ (س - ھ) کی وہی ہوگی جو علامت ح ۱ (س) کی ہے بشرطیکہ ھ کو کافی چہوٹا فرض کرین پس اگر لا = س - ھ کی ہو اور ھ کافی چہوٹا فرض کیا جاے تو ح (لا) اور ح ۱ (لا) کی مختلف علامتین ہونگین

اسیطرح سی ثابت ہوسکتا ہی کہ اگر لا = س + ھ کی اور ھ کافی چہوٹا فرض کیا جاسے

توح (لا) اورح (لا) کی ایک ہی علامت ہوگی
پس جب لا بڑہ کر مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمت پر اپنی نوبت پہونچائی تو سٹرم کی جملوں میں سے ایک تغیر علامت گم ہوجاتا ہے
دوم فرض کرو کہ س ایسی قیمت لا کی ہی کہ مستعان جملون میں سے ایک کو معدوم کرتا ہی مثلاح ر (لا) کو تو ح ر (س) = ۰ تو ح ر-۱ (س) اور ح ر+۱ (س) کی مختلف علامتین ہونگین اور ماقبل لا = س کی اور مابعد لا = س کی تین قیمتین ح ر-۱ (لا) اور ح (لا) وح ر+۱ (لا) ایک مستقل علامت ہمیشہ رکہینگی اور اونمین ایک تغیر علامت ہوگا اسواسطے کہ اگر ح ر-۱ (لا) اور ح ر (لا) کی ایک ہی علامت ہو تو ح ر (لا) اور ح ر+۱ (لا) کی مختلف علامتین ہونگین اور بالعکس اسکی پس ثابت ہوا کہ اگر لا کی نوبت اوس قیمت پر پہونچی کہ وہ کسی ایک جملہ مستعان کو معدوم کردے تو اوسی سٹرم کی جملون مین نہ کوئی تغیر علامت گم ہوتا ہے نہ پیدا ہوتا ہے
کوئی قیمت لا کی دو متصل کی جملون کو معدوم ایک ہی وقت مین نہین کرسکتی اگر دو یا زیادہ جملے جو متصل نہ ہون معدوم ہوجائین تو اگر ح (لا) اونمین سی ایک ہوگا تو موافق نتیجہ اول کے یہہ مستنبط ہوگا کہ ایک تغیر علامت گم ہوگا جب کہ لا کی زیادہ ہوکر اوس قیمت پر نوبت پہونچیگی اور اگر ح (لا) اونمین سی نہ ہو تو بموجب نتیجہ دوم کی یہہ اخذ ہوگا کہ کوئی تغیر علامت گم نہین ہوئی
پس ہم نی ثابت کردیا کہ جب لا زیادہ ہوتا ہی تو سٹرم کی جملون میں کبہی ایک تغیر علامت گم نہین ہوتا الا اوس صورت مین کہ لا کی نوبت مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمت پر پہونچی اور کبہی تغیر علامت پیدا نہین ہوتا
پس اسی معلوم ہوا کہ تعداد تغیرات علامت کی جو اسطرح گم ہوتی ہی کہ لا زیادہ ایک قیمت سہ سے ہوکر بڑی قیمت صہ پر اپنی نوبت پہونچائی وہ برابر ہوتی ہی مساوات ح (لا) = ۰ کی اون قیمتون کی تعداد کے جو درمیان سہ اور صہ کے واقع ہون
(۱۹۵) ہم نی ثابت کردیا ہی کہ سٹرم کی جملون مین تغیرات علامت کی اندر کوئی تبدل اسکے سبب سی نہین واقع ہوسکتا کہ لا کی نوبت اوس قیمت پر پہونچی کہ وہ کسی ایک جملہ مستعان کو

معدوم کردی مگر اکثر علامات + اور - کی ترتیب مین جملون کے سلسلہ کی اندر
تبدل واقع ہوتی ہین مثلاً فرض کرو کہ ا اور ب دو قیمتین مساوات ح (لا) = ۰ کی ہو اور ا بہ نسبت ب کی کم ہی تو
ح (لا) اور ح لا کی مختلف علامتین ماقبل لا = ا کی ہونگین اور ایک ہی علامتین ما بعد
لا = ا کے ہونگین اب ماقبل لا = ب کی علامتین ح (لا) اور ح ا (لا) کے پہر مختلف
ہونگین فی الحقیقت مساوات ح ا (لا) = ۰ کی ایک قیمت درمیان لا = ا اور لا = ب
کے ہوتی ہی پس ح ا (لا) کی نوبت مثبت سی منفی پر پہونچنی چاہئی یا بالعکس اسکے درمیان لا = ا اور
لا = ب کی پس ح ا (لا) کا مثبت سی منفی کی طرف جاتا یا بالعکس اسکی درمیان لا = ا
اور لا = ب کی ہونا کل تعداد تغیرات علامت سٹرم کی جملون کی سلسلہ کی کل تعداد
تغیرات علامت مین کچہ تبدل نہین کرسکتا یہہ ہمنے ثابت کردیا مگر سلسلہ مین جو تقسیم علامت
+ اور - کی ہی اوسمین وہ تبدل پیدا کرتا ہی اور اسی یہہ بات ممکن ہی کہ جب لا زیادہ
ہوکر ا پر اپنی نوبت پہونچانی سی ایک تغیر علامت کو گم کری تو اسکی بعد ایک اور تغیر علامت گم ہوگا
جب لا کی نوبت زیادہ ہوکر ب پر پہونچی

اس دفعہ سی کچہ سٹرم صاحب کی اثبات ضابطہ مین کوئی امر زیادہ نہین ہوتا فقط اوسی طالب علمون کی امداد اس باب
مین ہوتی ہی کہ کس طرح تغیرات علامت گم ہوتے ہین

(۱۹۶) سٹرم کی جملون کی سلسلہ مین تغیرات علامت کی تعداد گننی مین یہہ ہوسکتا ہی کہ قیمت لا کی
جسپر ہم بحث کررہی ستعان جملون مین سی کسی کو فنا کردی تو اس بات کا لحاظ کرنا چاہئی کہ ہم کو نسی
علامتین ایا مثبت کی یا منفی کی جملہ معدوم سی منسوب کرین کیونکہ علامتین اوسکی ماقبل اور مابعد جملون کی ضرور
مخالف ہوتے ہین

(۱۹۷) مساوات ح (لا) = ۰ کی تمام حقیقی قیمتون کی تعداد دریافت کرنی کی لئی لا کی جگہ - ص
اور پہر + ص سٹرم کی جملون مین رکہو پس اول صورت مین جتنی تعداد تغیرات علامت کی ہوگی
اوسکو جسقدر ازدیاد دوسری صورت کی تغیرات علامت کی تعداد پر حاصل ہوگا اوسیقدر تعداد

مساوات کی کل حقیقی قیمتون کی ہوگی جب لا برابر + ∞ یا - ∞ کی کیا جاے تو جملون مین سی ہر ایک جملہ کی وہی علامت ہوگی جو لا کی اعلی قوت کی علامت اوس جملہ مین ہو

(۱۹۸) فرض کرو کہ ح (لا) کی درجی کون تعبیر کری تو تعداد مستعان جملون ح (لا) و ح۱ (لا) -. اکثر ن ہوگی کیونکہ ہر باقی اکثر ایک درجہ کم بہ نسبت باقی ما قبل کی ہوگی پس یہہ ہم فرض کرینگے کہ جو ح (لا) کا درجہ ہی وہی تعداد مستعان جملون کی ہی اور ح (لا) مین جو اعلی قوت لا کی ہے اوسکی امثال مثبت ہین **اول** اگر کل مستعان جملون کی اول رقمون کی مثبت امثال ہون تو مساوات ح (لا) =. کی تمام قیمتین حقیقی ہونگین اسواسطی کہ سٹرم کی جملی مثبت ہونگی جب لا = + ∞ کے ہو اور وہ علی التبادل مثبت اور منفی ہونگین جب لا = - ∞ پس ن تغیرات علامت گم ہوینگے جب لا کی نوبت - ∞ سی + ∞ تک پہونچی

دوم اگر اول رقمون کی سب جملون مین امثال مثبت نہ ہون تو خیالی قیمتون کے زوج اوتنی ہی ہونگے جتنی کہ تغیرات علامت واقع ہونگی ہر تغیر کی واسطی ایک زوج ہوگا

فرض کرو کہ ان امثال کی سلسلہ مین م تغیرات علامت اور ن - م تواترات علامت ہین پس جب لا = + ∞ تو م تغیرات علامت اور ن - م تواترات علامات سٹرم کی جملون مین ہین اب لا کو + ∞ سی - ∞ مین بدل دو تو تغیرات علامت کی جگہہ تواترات علامت ہوجائینگی اور تواترات علامت کی جگہ تغیرات علامت ہوجائینگی پس جب لا = - ∞ تو ن - م تغیرات علامت ہونگے اسیواسطے تغیرات علامت کی تعداد جب لا = - ∞ کی اون تغیرات علامت کی تعداد سی کہ لا = + ∞ کے بقدر ن - ۲م کے زیادہ ہوگی اور ن - ۲م حقیقی قیمتین مساوات ح (لا) =. کی ہونگیں اور اسیواسطے ۲م خیالی قیمتون کی تعداد ہوگی

اسی معلوم ہوا کہ ایک مساوات کی تمام قیمتون کی حقیقی ہونی کی لئی یہہ ضرور ہی کہ کل مستعان جملون کی اول رقمون کی امثال ایک ہی علامت رکھین

(۱۹۹) فرض کرو کہ مستعان جملون کی اندر ہم کو یہہ دریافت ہوا کہ ح ر (لا) کی علامت نہین بدل سکتی

پس جتنی جملی اوسکی آگی نکلی اون پر کچھہ لحاظ نہ کرو اور سلسلہ ح (لا) وح۱ (لا) وح۲ (لا)۰۰ ح ر (لا) کے اندر تعداد تغیرات علامت کی شمار کرلو کیونکہ سٹرم صاحب کی ضابطہ کے اثبات مین اخر جملہ مستعان کی لابدی خاصیت یہہ ہونی چاہیئی کہ وہ معدوم نہ ہوتا ہو اور چونکہ ح ر (لا) معدوم نہین ہوتا تو ح (لا) وح۱ (لا) وح۲ (لا)۰۰ ح ر (لا) پر اثبات ضابطہ کا حاوی ہوگا یہہ بات عمل مین بڑی کام آتی ہی کیونکہ جب یا وا تین اعلی درجہ کی ہون تو وہان تمام سٹرم کی جملون کا سلسلہ دریافت کرنا بڑی محنت کا کام ہوتا ہی اسواسطے ایسی قلم عدہ کا بنانا کہ جسی یہہ مشقت شاقہ تمام سلسلہ کی بنانی کی چہوٹ جای نہایت ضروری ہے

(۲۰۰) فرض کرو کہ مح (لا) ایک جملہ ایسا ہی کہ اوسمین اور ح (لا) مین کوئی جزو ضربی مشترک نہین ہے اور فرض کرو کہ مح (لا) اور ح۱ (لا) مین جب کوئی قیمت ح (لا) = ۰ کے بجای لا کی مندرج کیجاے تو اونکی ایک ہی علامت ہوتی ہی تو ہم مح (لا) کو بجای ح۱ (لا) کے کام مین لاسکتی ہین اور باقی مستعان جملے ح (لا) اور مح (لا) سی بجای ح (لا) اور ح۱ (لا) کے مستنبط کرسکتی ہین اسواسطی کہ اگر سٹرم صاحب کی ضابطہ کی اثبات کو دوبارہ کام مین لائین تو یہہ معلوم ہوگا کہ ضابطہ کی دو اصلی خاصیتین ان جملون کی نئی سلک مین بہی موجود ہین ایک یہہ کسی جملہ مستعان کی معدوم ہونے سے کوئی تغیر علامت گم نہین ہوتا دوم یہہ کہ ح (لا) کے معدوم ہونی سی ایک تغیر علامت گم ہوتا ہے

(۲۰۱) ابتک ہم نی سٹرم صاحب کی ترکیب کے اندر مساوات کو برابر قیمتون سی صاف کرکی لکہا ہے لیکن اب یہہ ثابت کرتی ہین کہ اس قید کے کچہہ ضرورت نہین اور اس ضابطہ سی ہمیشہ تعداد جدا جدا قیمتون کی حدود معینہ کی اندر معلوم ہوجائیگی اور قیمتون کے مکررانی پر کچہہ لحاظ نہین کیا جائیگا مثلاً فرض کرو کہ ا قیمت ع دفعہ اور ب قیمت ق دفعہ مساوات ح (لا) = ۰ مین واقع ہوتی ہے

فرض کرو کہ ح (لا) = (لا − ا)^ع (لا − ب)^ق (لا − س) (لا − د) ۰۰۰

پس ح۱ (لا) = (لا − ا)^(ع−۱) (لا − ب)^(ق−۱) {ع (لا − ب) (لا − س) (لا − د) ۰۰۰ + ق (لا − ا) (لا − س) (لا − د) ۰۰۰ + ۰۰۰}

پس (لا - ا)^ع-۱ اور (لا - ب)^ق-۱ دفع اعظم ح (لا) اور ح۱ (لا) کا ہوگا
اور یہہ جملہ تمام ستعان جملون ح۲ (لا) و ح۳ (لا) ۰۰ ح۱ (لا) کو جو دفعہ ۱۹۴ مین
لکہی ہین تقسیم کریگا

اب فرض کرو کہ ھح (لا) = (لا - ا) (لا - ب) (لا - س) (لا - د) ۰ ۰ ۰

مح (لا) = ع (لا - ب) (لا - س) (لا - د) ۰

+ ق (لا - ا) (لا - س) (لا - د) ۰ ۰ ۰

+ (لا - ا) (لا - ب) (لا - د) ۰ ۰

+

تو مح (لا) اول جملہ مشتقہ ھح (لا) کا نہین ہے اسواسطے کہ
اگر ع = ۱ اور ق = ۱ ہو تو ہی جو مح (لا) ہوجایگا وہی جملہ مشتقہ ہوگا لیکن جب لا = ا
یا ب یا س وغیرہما کے ہو تو مح (لا) کی اور ھح (لا) کی اول جملہ مشتقہ کی ایک ہی علامت ہوتی ہے
اسی معلوم ہوا کہ بموجب دفعہ ۲۰۰ کے ہم مساوات ھح (لا) = ۰ کی حقیقی قیمتون کا
ھح (لا) اور مح (لا) کو اول دو جملے سٹرم کی بنا کر اونسی اور باقی جملے حاصل کر کے فیصلہ کرسکتے ہین
سٹرم کی جملون کا سلسلہ جو ح (لا) اور ح۱ (لا) سی حاصل ہوتا ہی وہ اوس سلسلہ سی
کہ ھح (لا) اور مح (لا) سی حاصل ہوتا ہی اس سبب سی فرق رکہتا ہی کہ اسکی ہر رقم مین ایک
جز ضربی زائد (لا - ا)^ع-۱ (لا - ب)^ق-۱ ہے
پس جب کوئی قیمت لا کی لگائین تو پہلی سلسلہ کی رقمون کی علامتین وہی ہونگین جو
دوسرے سلسلہ کی رقمون کی ہین یا اونکی بالکل بالعکس ہونگین سلئے تعداد تغیرات علامات کے وہی رہینگی
اسی معلوم ہوا کہ سٹرم کی جملون کی سلسلہ کی امتحان کرنی سی ہم کو یہہ بات دریافت ہوسکتی ہے
کہ مساوات ھح (لا) = ۰ کی کتنی قیمتین حدود معینہ مین واقع ہین یعنی مساوات ح (لا) = ۰ کی
قیمتین جدا جدا منفصل اون حدود مین دریافت ہوجاتی ہین

پس یہہ کچھہ ضرور نہیں کہ سٹرم کی ترکیب سے پہلے ہم متساوی قیمتوں کی تحقیقات مساوات میں کرین بلکہ جب سٹرم کی جملوں کا حساب لگائینگے تو ہم کو خود بخود مساوات کی برابر قیمتوں پر اگروہ ہونگین اطلاع اس سبب سے ہوجائیگی کہ اونکی موجود ہونی کی صورت مین باقی اخر صفر ہوگی

(۲۰۲) جس عمل سی کہ سٹرم جملی حاصل ہوتی ہین اوسکی اندر بعد اول جملی کی حاصل ہوتے کے مثل عمل وفق اعظم کی ہم مقسوم اور مقسوم علیہ کو اکثر کسی مثبت عدد مین ضرب دیجاتی ہین یا کسی مثبت عدد پر تقسیم کرجاتی ہین اور اسی کچھہ فرق عمل مین نہین اتا اسلئی کہ سٹرم جملی مثبت اعداد کی ضرب و تقسیم سی علامتون مین اپنی متبدل نہین ہوتے

سٹرم صاحب کے ضابطہ سی ہم مساوات مفروضہ کی حقیقی قیمتوں کی تعداد دریافت کرسکتی ہین سٹرم کی جملوں کی سلسلہ مین لا کی جگہہ متواتر اعداد صحاح مندرج کرین تو اوسی یہہ دریافت ہوگا کہ کونسی دو متصل کی اعداد صحاح کی درمیان قیمتین واقع ہین اور اگر یہہ دریافت ہو کہ دو اعداد معینہ کی درمیان ایک قیمت یا زیادہ قیمتین واقع ہین تو پہر اون اعداد صحاح کی مابین جو اعداد مکسور واقع ہون اونکو بجای لا کی مندرج کرتی جاتی ہین جب تک کہ اخر کو ہمین یہہ معلوم ہوتا ہے کہ ایک قیمت کل دو عددون کے درمیان واقع ہے

(۲۰۳) اب ہم بعض مثالین حل کرتے ہین

فرض کرو کہ ح (لا) = لا^۴ − ۲ لا^۳ − ۴ لا + ۱۳

یہان ح۱ (لا) = ۳ لا^۲ − ۶ لا − ۴

ح۲ (لا) = ۲ لا − ۵

ح۳ (لا) = + ۱

بموجب دفعہ ۱۹۸ کے مساوات کی تمام قیمتین مثبت ہین اب سلسلہ علامتوں کا لا کی قیمتوں کے موافق یہہ ہوگا

لا	ح (لا)	ح۱ (لا)	ح۲ (لا)	ح۳ (لا)
۰	+	−	−	+
۱	+	−	−	+
۲	+	−	−	+
۳	+	+	+	+

یہاں جب کہ لا = ۲ کی ہو تو دو تغیر علامت ہیں اور جب لا = ۳ کی ہو تو کوئی تغیر علامت نہیں ہوتا
اسی معلوم ہوا کہ دو مثبت قیمتیں ۲ اور ۳ کی درمیان واقع ہیں اور کوئی اور مثبت قیمت نہیں ہے
اور یہہ بھی دریافت ہوتا ہی کہ جب لا = -۳ تو تو علامات متواترہ یہہ ہوتے ہیں - + - - + اور جب لا = -۲
تو وہ + + - - + اس سے ایک تغیر علامت -۳ سی -۲ پر نوبت پہونچنی سی گم ہوتا ہے
اسواسطے منفی قیمت -۲ اور -۳ کی درمیان واقع ہی اب دو مثبت قیمتوں کی جدا جدا کرنے کے
لئی ہم کو ۲ اور ۳ کے مابینی اعداد کو لا کی جگہ رکھنا چاہئی مثلاً فرض کرو کہ ہم لا = ۲ ½ رکھیں
تو علامات متواترہ یہہ ہوتی ہیں - - ۰ + پس ایک تغیر علامت واقع ہوتا ہے
خواہ ۰ کو + یا - خیال کریں پس ۲ سی ۲ ½ پر نوبت پہونچانی سی ایک تغیر علامت گم ہوتا ہے
اسواسطے ایک قیمت ۲ اور ۲ ½ کے درمیان واقع ہے
اور اسی معلوم ہوا کہ دوسری قیمت ۲ ½ اور ۳ کے درمیان واقع ہوگی
اب پہر فرض کرو کہ ح (لا) = $لا^4 - ۶ لا^3 + ۵ لا^2 + ۴ ۱ لا - ۴ = ۰$

یہاں $ح_1 (لا) = لا^3 - ۹ لا^2 + ۵ لا + ۷$ جزو ضربی ۲ کو ساقط کر دیا ہی

$ح_2 (لا) = ۷ ۱ لا^2 - ۵۷ لا - ۵$

$ح_3 (لا) = ۱۵۲ ۱ لا - ۴۵۷$

$ح_4 (لا) = +$

اس مثال میں $ح_4$ (لا) کا حساب لگانا پیچیدگی سی خالی نہیں مگر ہمارے مطلب برآری کی فقط اتنی بات جاننی کافی ہی کہ
کہ علامت کیا ہی پس جب ہم کو یہہ تحقیق ہو گیا کہ وہ مثبت ہی تو ہم اوسکا حساب ٹہیک ٹہیک نہیں کرتی اور صرف

$ح_4 (لا) = +$ لکہ لیتے ہیں
بموجب دفعہ ۱۹۸ اکے مساوات کی تمام قیمتیں حقیقی ہیں
لا کی قیمتوں کے موافق سلسلہ علامات یہہ ہے

	ح(لا)	ح۱(لا)	ح۲(لا)	ح۳(لا)	ح۴(لا)
-۲	+	-	+	-	+
-۱	-	-	+	-	+
۰	-	+	-	-	+
۱	+	+	-	-	+
۲	+	-	-	-	+
۳	+	-	-	-	+
۴	+	+	+	+	+

-۲ اور -۱ کے درمیان ایک اور ۰ اور ۱ کی درمیان ایک تغیر علامت گم ہوتا ہی اور ۳ اور ۴ کی درمیان دو تغیرات علامت گم ہوتے ہین

اگر ہم ۳½ بجای لا کی رکہین تو علامات متواترہ - - + + حاصل ہوتی ہین انمین ایک تغیر علامت ہے پس ایک قیمت مساوات کی ۳ اور ۳½ کی درمیان واقع ہوتی ہین اور اسیواسطے دوسری قیمت ۳½ اور ۴ کی درمیان واقع ہوتی ہے

اب فرض کرو کہ ح(لا) = ۲لا^{۴} - ۳لا^{۲} + ۱۰لا - ۴۹ = ۰

یہان ح۱(لا) = ۴لا^{۳} - ۳لا + ۵ جز ضربی ۲ کو ساقط کر دیا ہے

ح۲(لا) = ۱۳لا^{۲} - ۱۵لا + ۹۸

اب یہہ بات بادی النظر مین معلوم ہوتی ہی کہ مساوات ح۲(لا) = ۰ کی خیالی قیمتین ہین ح۲(لا) کبہی کسی لا کی حقیقی قیمت سی معدوم نہین ہوسکتا اسواسطی بموجب دفعہ ۱۹۹ کی اس مثال مین سٹرم صاحب کی زیادہ قیمتون کی دریافت کرنی کی ضرورت نہین ہے، جب لا = - ∞ تو علامات متواترہ + - + اور جب لا = ∞ تو علامات متواترہ + + + پس مساوات کی دو حقیقی قیمتین اور دو خیالی قیمتین ہین اور حقیقی قیمتون مین سی ایک مثبت اور دوسری منفی بموجب دفعہ ۲۱ کے ہے

پندرہوان باب فوریر کا ضابطہ

(۲۰۴) جس سوال کی حل کرنی مین دو سو برس سی اکثر بڑی بڑی مہندسین توجہ کر رہی تہے وہ سٹرم صاحب کی ضابطہ سی تمام اور کمال حل ہو گیا یہہ ضابطہ پیرس مین سنہ ۱۸۳۵ع مین ایک کتاب مین منطبع ہوا سٹرم صاحب سی پہلی جن مہندسین نی اس سوال کی حل کرنی مین توجہ اور کوشش کی اونمین سے لودن صاحب اور فوریر صاحب کا حال قابل لکہنی کے ہے

ان دونو مہندسین کی ترکیبین ایک مسئلہ سی نکلتی ہین اور اس مسئلہ کا موجد اہل انگلستان کے نزدیک تو فوریر صاحب ہین اور اہل فرانس کے نزدیک بوڈن اور فوریر دونو کو اس مسئلہ کا توارد ہوا مسائل معادلات کا باب ہین کتاب فوریر کی ۱۸۳۱ء مین منطبع ہوئی اور بوڈن کی کتاب اسی باب مین ۱۸۱۱ء مین منطبع ہوئی مگر اس امر کی شہادت موجود ہی کہ فوریر نی اپنی اس مسئلہ کو طالب علمون کے روبرو لکچر ہین بوڈن کی کتاب کے انطباع سی پہلی بیان کیا تہا اب ہم اس مسئلہ کو ثابت کرتے ہین

(۲۰۵) **فوریر صاحب کا ضابطہ** فرض کرو کہ ح (لا) جملہ جبریہ ن درجہ کا ہو اور ح۱ (لا) اور ح۲ (لا) ۰۰۰ حن (لا) جملی مشتقہ جملہ ح (لا) کی ہون اور سہ کوئی سی مقدار ہو اور صہ دوسری مقدار اوسی بڑی جبر مقابلہ کی اعتبار سی ہو تو مساوات ح (لا) = ۰ کی اصلی قیمتین سہ اور صہ کی درمیان بڑی اوس از زیادی نہین ہوسکتین جو تعداد تغیرات علامت سلسلہ ح (لا) و ح۱ (لا) و ح۲ (لا) ۰ ۰ حن (لا) کو جب لا = سہ کے ہو اوس تعداد تغیرات علامت پر اس سلسلہ کے حاصل ہی کہ جب لا = صہ کے ہو

ہم اس تمام سلسلہ ح (لا) و ح۱ (لا) و ح۲ (لا) ۰۰۰ حن (لا) کو فوریر کے جملے کہینگے فوریر کے جملون ہین سی کسی جملہ کی اندر تبدل علامت جب تک نہین واقع ہوگا کہ لا کی نوبت اوس قیمت تک پہونچی کہ وہ جملہ کو معدوم کردی اب چار صورتین بحث طلب ہین

اول فرض کرو کہ لا = س کی ح (لا) کو معدوم کرتا ہی اور ح۱ (لا) معدوم نہین ہوتا اب لا کی جگہ س - ھ رکہو اور ھ ایک مثبت مقدار ہی تو ھ کو ایسا چہوٹا فرض کرسکتی ہین کہ علامت ح (س - ھ) کی وہی ہو جو - ھ ح۱ (س) کی ہی اور بموجب دفعہ ۱۴ - علامت ح۱ (س - ھ) کی وہی ہی جو ح۱ (س) کی ہی پس اگر لا = س - ھ اور ھ کافی چہوٹا فرض کیا جاوے تو ح (لا) اور ح۱ (لا) کی مختلف علامتین ہونگین

اسیطرح یہہ ثابت ہوسکتا ہی کہ اگر لا = س + ھ اور ھ چہوٹا کافی مقرر کیا جاوے تو ح (لا) اور ح۱ (لا) کی ایک ہی علامت ہوگی

پس جب لا بڑھ کر . مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمت غیر مکرر س پر نوبت پہونچاتا ہی
تو فوریر کے جملوں میں سی ایک تغیر علامت گم ہو جاتا ہے

دوم فرض کرو کہ جب لا = س تو ح (لا) معدوم ہوتا ہی اور اوسکی ساتھہ ہی جملی مشتقہ
ح ۱(لا) و ح ۲(لا) ... ح ر-۱(لا) تک معدوم ہو جاتی ہیں اور ح ر(لا) معدوم نہیں ہوتا
س - ھ بجای لا کی رکھو اور ھ مثبت مقدار ہی تو ھ کو ایسا چھوٹا فرض کر سکتی ہیں کہ ان رقموں کے سلسلہ کے
ح (س - ھ) و ح ۱(س - ھ) و ح ۲(س - ھ) ... ح ر-۱(س - ھ) و ح ر(س - ھ)
علامتیں جداگانہ وہی ہوں جو ان رقموں کے سلسلہ کی ہیں کہ
(- ھ)^ر ح ر(س) و (-س)^(ر-۱) ح ر(س) و (-س)^(ر-۲) ح ر(س) ... - ھ ح ر(س) و ح ر(س)
دفعات ۱۱۰ اور ۱۴۱ دیکھو پس اگر لا = س - ھ اور ھ چھوٹا کافی مقرر کیا جای تو
فوریر کے اول ر + ۱ جملوں میں ر تغیرات علامت پیدا ہوتے ہیں
اسیطرح یہہ ثابت ہو سکتا ہی کہ اگر لا = س + ھ اور ھ کافی چھوٹا مقرر کیا جاے تو فوریر کے
اول ر + ۱ جملوں میں کوئی تغیر علامت نہیں پیدا ہوتا ہے
پس جب لا بڑھ کر اپنی نوبت س پر پہونچاتا ہی جو مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک ایسی قیمت ہی کہ ر دفعہ مکرر آئی
تو فوریر کے جملوں میں سی ر تغیرات علامت گم ہوتے ہیں

سوم فرض کرو کہ جب لا = س تو مشتقہ جملوں میں سی ایک جملہ معدوم ہوتا ہے
مگر اوسکے طرفین متصلہ کی جملی معدوم نہیں ہوتی مثلاً فرض کرو کہ
جب لا = س کے تو ح ر(لا) معدوم ہوتا ہی مگر ح ر-۱(لا) اور ح ر+۱(لا) میں سے
کوئی معدوم نہیں ہوتا پس اگر ھ چھوٹا کافی فرض کیا جاے تو جب لا = س - ھ تو علامتیں
ح ر-۱(لا) اور ح ر(لا) اور ح ر+۱(لا) کی جداگانہ وہی ہونگیں جو
ح ر-۱(س) اور ح (س) اور ح ر+۱(س) کی ہیں اور جب لا = س + ھ تو علامتیں
وہی ہونگیں جو ح ر-۱(س) و - ھ ح ر+۱(س) و ح ر+۱(س) کی ہیں

پس اگر ح ر-۱ (س) اور ح ر+۱ (س) کی ایک ہی علامت ہو تو فوریر کے جملون مین دو
تغیرات علامت گم ہونگی اور جب لا کی نوبت برہ کر س پر پہونچے اور اگر
ح ر+۱ (س) اور ح ر+۱ (س) کی مختلف علامتین ہون تو فوریر کے جملون مین نہ تو تغیر
علامت گم ہوتا ہی نہ پیدا ہوتا ہے

چہارم فرض کرو کہ جب لا = س تو کئی ایک متواتر جملی معدوم ہو جاتی ہین مثلاً جب لا = س
تو فرض کرو کہ م جملی ح ر (لا) و ح ر+۱ (لا) و ۰۰ ح ر+م-۱ (لا) معدوم ہوتے ہین اور
اور ح ر-۱ لا اور ح ر+م (لا) معدوم نہین ہوتے تو موافق سابق کے عمل کرو
اور ھ کو مثبت اور چہوٹا کافی مقرر کرو تو نتایج مفصلہ ذیل بلحاظ م + ۲ ارقام
ح ر-۱ (لا) و ح ر (لا) ۰۰۰ ح ر+م-۱ (لا) و ح ر+م (لا) کے حاصل ہونگے

(۱) فرض کرو کہ م جفت ہی اگر ح ر-۱ (س) اور ح ر+م (س) کی ایک ہی علامت ہو تو ارقام مین
جب لا = س - ھ کے ہو م تغیرات علامت واقع ہونگی اور جب لا = س + ھ کی ہو تو کوئی تغیر
علامت نہین واقع ہوگا اگر ح ر-۱ (س) اور ح ر+م (س) کی مختلف علامتین ہون تو ارقام مین
جب لا = س - ھ کی ہو م + ۱ تغیرات علامت واقع ہونگی اور جب لا = س + ھ کے ہو
تو ایک تغیر علامت واقع ہوگا پس فوریر کی جملون مین دونو صورتون کی اندر جب لا کی نوبت س پر پہونچی
م تغیرات علامت گم ہونگے

(۲) فرض کرو کہ م طاق ہی اگر ح ر-۱ (س) اور ح ر+م (س) کی ایک ہی علامت ہو
تو ارقام مین جب لا = س - ھ کی ہو م + ۱ تغیرات علامت واقع ہونگی اور جب
لا = س + ھ کے ہو تو کوئی تغیر علامت نہین واقع ہوگا پس فوریر کی جملون مین جب لا کی برہ کر نوبت
س پر پہونچتی ہی تو م + ۱ تغیرات علامت گم ہوتی ہین اگر ح ر-۱ (س) اور ح ر+م کی علامتین مختلف ہون
تو ارقام مین جب لا = س - ھ کی ہو م تغیرات علامت اور جب لا = س + ھ کے ہو تو
ایک تغیر علامت واقع ہوتا ہی پس جب لا کی بڑہ کر نوبت س پر پہونچی ہی تو فوریر کے

جملے م – التغیرات علامت کو گم کرتے ہین

المختصر یہہ ہے کہ جملے فوریر کے کبھی تغیر علامت حاصل نہین کرتی بلکہ جب لا کی سرہ کو نوبت س پر که ایک قیمت مساوات ح (لا) = ۰ کی ہی پہونچی ہی تو ایک تغیر علامت گم ہو جاتا ہے

پس ضابطہ ثابت ہوا

(۲۰۶) دفعہ ۲۰۵ مین جو دعوی ہم نے آسانی کی واسطے بیان کیا تہا وہ ثابت ہوا اور اوسکے علاوہ اور باتین بہی ثابت ہین ہم نے اونکو اس سبب سے دفعہ ۲۰۵ مین نہین بیان کیا تہا کہ دقت نہ واقع ہو یہہ ظاہر ہی کہ جب فوریر کے جملون کی تغیرات علامت کی تعداد مین تبدل واقع ہوتا ہے باستثنا اوس وجہ کی جو از دیاد غیر مقررہ سے مساوات معلوم کی قیمت پر نوبت پہونچتی ہی جفت تعداد تغیرات علامت کی گم ہوتی ہی الحاصل اگر متواتر سہ اور اوس سے بڑا عدد صہ فوریر کی جملون مین مندرج کرین تو یہہ نتیجہ حاصل ہوگا کہ

(۱) فرض کرو کہ فوریر کی جملون مین کوئی تغیر علامت گم نہین ہوتا تو کوئی قیمت مساوات کی سہ اور صہ کے درمیان نہین واقع ہوگی

(۲) فرض کرو کہ فوریر کی جملون مین طاق تعداد تغیرات علامت کی گم ہوتی ہی تو ہم کو یقینی معلوم ہوتا ہے کہ قیمتین مساوات کی جنکی تعداد طاق ہو سہ اور صہ کی درمیان واقع ہین لیکن ہم یہہ نہین کہہ سکتے وہ کونسی طاق تعداد ہی الا اوس صورت مین کہ ایک تغیر علامت گم ہوا ہو تو ہم کو یقینی معلوم ہوتا ہی کہ ایک قیمت ہے

(۳) فرض کرو کہ فوریر کی جملون مین جفت تعداد تغیرات علامت کی گم ہوتی ہی تو ہم یہہ نتیجہ نکالتے ہین کہ یا تو کوئی قیمت سہ اور صہ کی درمیان نہین واقع ہی اور اگر واقع ہین تو جفت تعداد اونکی ہے

(۲۰۷) فوریر کے ضابطہ مین یہہ ایک فایدہ ہی کہ اوسکا استعمال آسانی سے ہو سکتا ہی کیونکہ جملہ معلوم کی جملے مشتقہ آسانی سے دریافت ہوجاتی ہین مگر یہہ نقصان بہی ہی کہ اوسمین امتحان لا تعداد کرنی پڑتی ہین اگر دو قیمتین بہت قریب قریب ہون تو اونکی بون کے جنکی اندر وہ واقع ہوتی ہین بہت سی چہوٹی چہوٹی حصے کرنی پڑتی ہین تا کہ اونکے تمیز خیالی قیمتون سے ہو جاے اور اسکی بہی ضرورت پڑتی

فوریر کے ضابطہ کی موافق عمل کرنی سی پہلی اس بات کا امتحان کریں کہ مساوات ہر ابر قیمتیں رکہتی ہی یا نہیں اگر ایسا نہ کرینگے تو مکرر قیمتوں کی جفت تعداد ہم کو معلوم نہیں ہوگی

(۲۰۸) بوڈن اور فوریر دونوں کی ترکیبیں بوں شنبہ کی امتحان کرنی کی لکھی ہیں تا کہ یہہ بات ظاہر ہوجاے کہ قیمتیں مساوات مفروضہ کی اوس بلوں کی اندر واقع تہیں یا نہیں لیکن ان ترکیبوں کا بیان کرنا مفاید ہے اسلئی کہ سٹرم کی ضابطہ سی مطلب یقینی حاصل ہوجاتا ہی اور اوسمیں کچہ دقت بہی نہیں پڑتی ہے

(۲۰۹) یہہ بہی ثابت ہوسکتا ہی کہ فوریر کی ضابطہ کی اندر ڈس کارٹس کے علامتوں کا بہی قاعدہ داخل ہے

فرض کرو کہ ح (لا) = ۰ مساوات کامل ہے

اگر لا = ۰ فوریر کے جملوں میں رکہیں تو علامتیں وہی ہونگیں جو جملہ ح (لا) میں بائیں طرف سی دائیں طرف تہیں اور اگر ہم لا = ∞ کے فوریر کے جملوں میں رکہیں تو علامتیں سب مثبت ہونگیں اسی معلوم ہوا کہ فوریر کی ضابطہ کے موافق مساوات ح (لا) = ۰ کی مثبت قیمتیں زیادہ تعداد میں ح (لا) کی تغیرات علامت کی تعداد سی نہیں رکہہ سکتی اگر مساوات مفروضہ کامل نہ ہو تو ارقام معدومہ کو لکہکر اونکی امثال صفر بنا کر لکہہ دو اور ان امثال پر علامتیں ایسی لگ سکتی ہیں کہ فوریر کی جملوں میں تغیرات علامت کی اوس حالت میں کہ ان ارقام کا بہی شمار ہو اوتنی ہی تعداد ہو جتنی کہ بغیر رقموں کی تعداد تغیرات علامت تہی قاعدہ علامات کا وہ جز جو منفی قیمتوں سی متعلق ہی وہ اوس جز سی کہ مثبت قیمتوں سی متعلق ہے مستنبط ہوسکتا ہے دفعہ ۶۳ دیکہو

(۲۱۰) مساوات کی مثبت قیمتوں کی اعلی حد غائی دریافت کرنی کی ترکیب نیوٹن صاحب کے ہی وہ بہی فوریر کی ضابطہ میں داخل ہی دفعہ ۹۵ دیکہو اسواسطے کہ اگر ح (لا) = ۰ مساوات ہو تو نیوٹن کی ترکیب کے موافق ہم کو ھ کی قیمت ایسی دریافت کرنی چاہی کہ جب لا = ھ تو فوریر کے جملے تمام مثبت ہوں پس موافق ضابطہ فوریر کی مساوات مفروضہ کی کوئی قیمت درمیان لا = ھ اور لا = +∞ کے نہیں ہوگی

سولہوان باب لاگرانژ کی ترکیب تقریب

(۲۱۱) ہم نی ابہی بیان کیا ہی کہ قیمتین ناطقہ محدودہ کن ترکیبون سی دریافت ہوتی ہین اب ہم یہہ بیان کرتے ہین کہ مساوات کی حقیقی اصم قیمتون کی قدر عددی تقریباً کن حسابون سی دریافت ہوتے ہین سٹرم صاحب کی ضابطہ سی یہہ بات ہمیشہ ہم کو معلوم ہوسکتی ہی کہ کتنی قیمتین ایک بون معلوم مین واقع ہوسکتی ہین اور پہر ہم اس بون معلوم کو ایسی چہوٹی چہوٹی بون مین تقسیم کرسکتی ہین کہ جنکی درمیان مین جدا جدا ہر ایک قیمت واقع ہو فرض کرو کہ ہم کو معلوم ہی کہ مساوات کی ایک ہی قیمت ہی اور صرف ایک ہی قیمت دو مقادیر معلوم سہ اور صہ کی درمیان واقع ہی اب ہم یہہ دریافت کرنا چاہتی ہین کہ اس قیمت کی قدر تقریباً کیا ہے سہ اور صہ کی درمیان ایک مقدار لر لو اور اوسکو بجای لا کے ح (لا) مین رکہو تو ح (لر) کی علامت سی ہم کو یہہ بات معلوم ہوجائیگی کہ قیمت سہ اور لر کے درمیان واقع ہے یا لر اور صہ کے درمیان فرض کرو کہ وہ سہ اور لر کے مابین واقع ہی تو پہر بجای لا کے ہم ایک مقدار فر جو مابین سہ اور لر کے واقع ہو رکہینگی اور ح (فر) کے علامت سی یہہ دریافت کرینگے کہ قیمت سہ اور فر کے درمیان واقع ہی یا سہ اور فر کے بیچ مین واقع ہی اب اسی عمل کو جاری رکہین جب تک کہ قیمت کے قدر عددی تقریباً ہم کو خاطر خواہ حاصل ہو ہر عمل مین جس بون کے درمیان قیمت واقع ہوگی اوسکی تنصیف ہوتی جائینگے

جو عمل یہان ہم نے بیان کیا اوسمین مشقت شاقہ اوٹہانی پڑتی ہی اور بڑا طول طویل عمل کرنا پڑتا ہے اسلئی ترکیبین ایجاد ہوئین ہین جنسی کہ عمل مختصر ہوجاتا ہی اونمین سی اول ہم لاگرانژ کی ترکیب بیان کرتے ہین

(۲۱۲) فرض کرو کہ ح لا = ۰ مساوات ہی جسکی نسبت ہم کو یہہ معلوم ہی کہ اوسکی صرف ایک قیمت دو مثبت صحاح متصلہ ا اور ا + ۱ کی درمیان واقع ہی لا = ا + ۱/ی کی رکہو اور لا کی اس قیمت کو مساوات مفروضہ مین مندرج کرو تو ح (ا + ۱/ی) = ۰ اب اگر اس مساوات کو کسری خالص کرین تو ایک مساوات ی کی اوسی درجہ کی حاصل ہوجائیگی جس درجہ کی مساوات لا کی تہی اسکو مح (ی) = ۰ کہو

تعبیر کردہ مساوات ی کی صرف ایک قیمت مثبت ہوگی کیونکہ اصل مساوات مین لا کی ایک قیمت
ا اور ا + ا کی درمیان واقع ہی اب ہم صحاح متصلہ ا و ۲ و ۳ ۰۰۰ کو مح(ی) مین بجای ی کے
رکھہ رکھہ کر یہہ دریافت کرین کہ وہ کونسی دو نتایج متصلہ ہین کہ جنکی علامتین مختلف ہین فرض کرو کہ یہہ
دو نتیجی ب اور ب + ا حاصل ہوئی جنکی درمیان ی واقع ہی ی = ب + $\frac{1}{س}$ کی مقرر کرو اور
اوسکو بجای ی کی مندرج کرو تو مح (ب + $\frac{1}{س}$) = ۰ تو موافق سابق کی یہان بہی ایک مساوات
حاصل ہوگی جسکی مقدار مجہول کی قیمت ایک ہی مثبت ہوگی اور ہم صحاح متصلہ س اور س + ا ایسی تحقیق
کر سکتی ہین جنکی درمیان قیمت ی کی واقع ہو

پس ی = س + $\frac{1}{د}$ مقرر کرو اور علے ہذا القیاس

پس لا کی قیمت خاطر خواہ تقریباً اس کسر مسلسل کے صورت مین دریافت ہوجائیگی

$$لا = ا + \cfrac{1}{ب + \cfrac{1}{س + \cdots}}$$

(۲۱۳) اب فرض کرو کہ مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک سی زیادہ قیمتین درمیان صحاح ا اور ا + ا کے واقع ہین
سٹرم صاحب کی ضابطہ کی موافق یا بعض اور قیمتون کے جدا جدا کرنے کے ترکیب سی یہہ ہم تحقیق
کر سکتی ہین کہ مساوات کی قیمتون کو جو ان دو صحاح متصلہ کی درمیان واقع ہین کس عدد مین
ضرب دین کہ جو حاصل ضرب سی حاصل ہون کہ وہ مختلف صحاح متصلہ کی درمیان واقع ہون
اب مساوات کی ہیئت بدل کر ایک اور ایسی مساوات پیدا کرو کہ اوسکی قیمتین مساوات مفروضہ
کی قیمتون کی اضعاف موافق اس عدد متصلہ کی ہون یعنی اس مساوات کے قیمتین برابر مساوات مفروضہ
کی قیمتون اور اس عدد کے حاصل ضرب کے ہون اور پہر اس بدلی ہوئی مساوات پر سوان دفعہ
گذشتہ کے عمل کرو

یا ہم دفعہ گذشتہ کی عمل تعبیر مساوات کی ہیئت بدلنی کی کام مین لائین اس حالت مین مساوات ی کی
ایک سی زیادہ مثبت قیمتین ہونگین پہر قیمت مین سب سے بڑی صحیح عدد کو ہم تلاش کرین
اور پہر جدا جدا حساب ی کی مختلف قیمتون کی لگائین یہہ بہی ہوسکتا ہی کہ مساوات ی کی

ایک سی زیادہ قیمتین خاص صحاح متصلہ کی درمیان واقع ہون تو مساوات ی سے اونکے
اندر تمیز پیدا کرو اور پہر ہر ایک قیمت کا حساب جاری رکہو اور یہی عمل کئی جاؤ

(۲۱۴) مساوات معلوم ح (لا) =۰ سی ج (ا + $\frac{۱}{ی}$) =۰ کے حاصل کرو
یعنی ح (لا) کون درجہ کا فرض کرکے یہہ حاصل کرو کہ

$$ح(ا) + \frac{۱}{ی} حَ(ا) + \frac{۱}{ی^۲}\frac{حً(ا)}{۲} + \frac{۱}{ی^۳}\frac{ح^۳(ا)}{لـ۳} + \ldots + \frac{۱}{ی^ن}\frac{ح^ن(ا)}{لـن} = ۰$$

یٰن مین ضرب دو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$ی^ن ح(ا) + ی^{ن-۱} حَ(ا) + ی^{ن-۲} حً \frac{ا}{۲} + \ldots + \frac{ح^ن(ا)}{لـن} = ۰$$

پس مساوات ی کی بنانی کی واسطی عددی قیمتین ح (ا) اور حَ (ا) اور حً (ا) ۔ ۔ ۔
دریافت کرنی چاہئی اور ان عددی قیمتون کا حساب موافق دفعہ ۵ کی ہوسکتا ہی مگر دفعہ ۲۵۸ مین جو
ہم نی بیان کیا ہی کہ ایسی حسابون کی کرنی کی ترکیب ہورنر صاحب کی ترکیب کے باب مین بیان ہوگی
وہی یہان ہم بیان کرتی ہین اور یہی کیفیت مساوات ی کی بننی کی ہے
دفعات ۲۱۴ اور ۵۸ پر رجوع کرنی سی لاگرانز کی ترکیب تقرب اسطرح بیان ہوسکتی ہے کہ
فرض کرو ایک قیمت مساوات مفروضہ کی ا اور ا+۱ کی درمیان واقع ہوتی ہی مساوات کی قیمتین بقدر
ا کے گہٹاؤ اور پہر مساوات متکافیہ اوسکی بناؤ اور اس اخر مساوات کی ایک قیمت ب اور ب+۱ کے
درمیان دریافت کرو اور قیمتون کو بقدر ب کی گہٹاؤ اور مساوات متکافیہ بناؤ
اور پہر اس اخر مساوات کی قیمت س اور س+۱ کی درمیان تحقیق کرو اور قیمتون کو بقدر س کے گہٹاؤ
اور مساوات متکافیہ بناؤ اور اسی طرح عمل کئی جاؤ تو یہہ کسر متسلسل

$$ا + \cfrac{۱}{ب + \cfrac{۱}{س + \ldots}}$$

اصل مساوات کی ایک قیمت ہوگی

(۲۱۵) مثال $لا^۳ - ۲لا - ۵ = ۰$

دفعہ ۸۰ اسکے موافق مساوات کی ایک اصلی قیمت ہی اور بموجب دفعہ ۲۰ کی یہہ قیمت مثبت مقدار ہوگی

اور امتحان سی معلوم ہوتا ہے کہ وہ ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہے

فرض کرو کہ لا = ۲ + $\frac{۱}{د}$ تو

$ح(۲) = ۲^{۳} - ۲×۲ - ۵ = -۱$

$حَ(۲) = ۳×۲^{۲} - ۲ = ۱۰$

$\frac{۱}{۲}\ حً(۲) = ۳×۲ = ۶$

پس مساوات د کی $-د^{۳} + ۱۰د^{۲} + ۶د + ۱ = ۰$ یعنی

$د^{۳} - ۱۰د^{۲} - ۶د - ۱ = ۰$ اب اسکو ح (د) = ۰ کہو

یہاں د = ۱۰ اکے ح (د) کو منفی اور د = ۱۱ ح (د) کو مثبت بناتا ہی اسواسطی قیمت مطلوب د کی ۱۰ اور ۱۱ کے درمیان واقع ہوگی د = ۱۰ + $\frac{۱}{ی}$ سکے فرض کرو تو

$ح(۱۰) = ۱۰^{۳} - ۱۰×۱۰^{۲} - ۶×۱۰ - ۱ = -۶۱$

$حَ(۱۰) = ۳×۱۰^{۲} - ۲۰×۱۰ - ۶ = ۹۴$

$\frac{۱}{۲}\ حً(۱۰) = ۳×۱۰ - ۱۰ = ۲۰$

اور مساوات ی کی $-۶۱ی^{۳} + ۹۴ی^{۲} + ۲۰ی + ۱ = ۰$ یعنی

$۶۱ی^{۳} - ۹۴ی^{۲} - ۲۰ی - ۱ = ۰$ اسکو ص (ی) = ۰ سی تعبیر کرو

یہاں ی = ۲ کے ص (ی) کو مثبت بناتا ہی پس قیمت مطلوب ی کی ۱ اور ۲ کی درمیان واقع ہے

فرض کرو کرو کہ ی = ۱ + $\frac{۱}{د}$ تو

$ص(۱) = ۶۱×۱^{۳} - ۹۴×۱^{۲} - ۲۰×۱ - ۱ = -۵۴$

$صَ(۱) = ۱۸۳×۱^{۲} - ۱۸۸×۱ - ۲۰ = -۲۵$

$\frac{۱}{۲}\ صً(۱) = ۱۸۳×۱ - ۹۴ = ۸۹$

مساوات د کی $-۵۴د^{۳} - ۲۵د^{۲} + ۸۹د + ۱ = ۰$ یعنی

$۵۴د^{۳} + ۲۵د^{۲} - ۸۹د - ۱ = ۰$

اس مساوات سی معلوم ہوتاہی کہ د کی قیمت ا اور ۲ کے درمیان واقع ہی اسلیے ہوانق سابق کی عمل کرو

اسی معلوم ہوا کہ لا = ۲ + $\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}$ وغیرہ

پس کسر مسلسل کے مقربین $\frac{2}{1}$ و $\frac{12}{10}$ د $\frac{23}{11}$ د $\frac{44}{21}$ . . . مین جبر مقابلہ کا چالیسواں باب دیکھو

$\frac{44}{21}$ اور قیمت کی اصل قدر مین فرق کم بہ نسبت $\frac{1}{21(21+11)}$ یعنی کم بہ نسبت $\frac{1}{672}$ کے ہے

ایک اور مثال کی واسطی یہہ مساوات $لا^3 - 7 لا + 7 = 0$ ۔ لوبموجب دفعہ ۱۰۸ کے مساوات کے

تمام اصلی قیمتیں ہیں اور بموجب سٹرم صاحب کی ضابطہ کی یہہ ثابت ہوسکتا ہی کہ ایک قیمت درمیان ا

اور $1\frac{1}{2}$ کی واقع ہی اور دوسری قیمت $1\frac{1}{2}$ اور ۲ کے درمیان اسیواسطی اگر لا = $\frac{لا}{2}$ کے لکھیں

اور مساوات لا کی بنائیں تو مساوات کی ایک قیمت ۲ اور ۳ کے درمیان اور ایک قیمت ۳ اور ۴ کے

درمیان واقع ہوگی اور مساوات لا کی یہہ ہی $(\frac{لا}{2})^3 - 7 \frac{لا}{2} + 7 = 0$

یعنی $لا^3 - 28 لا + 56 = 0$

قیمت جو ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہے یہہ ہوگی کہ

$$2 + \frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+} \text{وغیرہا}$$

اور قیمت جو ۳ اور ۴ کے درمیان واقع ہو

$$3 + \frac{1}{2+}\frac{1}{1+} \text{وغیرہا}$$

ان قیمتوں میں سے ہر ایک قیمت کے نصف کرنی سی اصل مساوات کی قیمتیں دریافت ہوجائیگی

باہم لاگرانش کی ترکیب اصل مساوات پر کام میں لائیں اور مساوات کی ہیئت کو ابتداءً متبدل نہ کریں

فرض کرو کہ لا = $1 + \frac{1}{د}$ تو $(1 + \frac{1}{د})^3 - 7 (1 + \frac{1}{د}) + 7 = 0$ اسسے یہہ حاصل ہوگا کہ

$د^3 - 4 د^2 + 3 د + 1 = 0$ اسکو مح (د) = ۰ سے تعبیر کرو

یہاں مح (۱) مثبت ہی اور مح (۲) منفی اور مح (۳) مثبت ہی پس ایک قیمت مثبت د کی ۱ اور ۲ کے

درمیان اور دوسری قیمت ۲ اور ۳ کی درمیان واقع ہوگی تو ء = ۱ + $\frac{1}{ی}$ اول قیمت کو تقریباً معلوم کرنی کی واسطی اور ء = ۲ + $\frac{1}{ی}$ دوسری قیمت کو تقریباً دریافت کرنے کے واسطی فرض کرو

مساوات لا^{۳} - ۷ لا + ۷ = ۰ کی ایک منفی قیمت ہی اوسکو اسطرح دریافت کرسکتی ہین کہ لا کو - لا سے بدل دو اور مساوات مستحصلہ کی قیمت کا حساب لگاؤ یعنی مساوات

$$(-لا)^{۳} - ۷ (-لا) + ۷ = ۰$$ کا

چونکہ مساوات لا^{۳} - ۷ لا + ۷ = ۰ کی تینون قیمتون کا مجموعہ صفر ہے تو جب دو قیمتون کا حساب تقریباً ہو جائیگا تو تیسری قیمت کا حساب بھی تقریباً معلوم ہو جائیگا

(۲۱۶) اگر لاگرانشز کی ترکیب کے اندر ہم کو ایسی مساوات حاصل ہو کہ اوسکی قیمت ایک صحیح عدد ہو تو اصل مساوات کی ہم کو ایک قیمت کسر مسلسل محدود مین دریافت ہوگی یعنی ہم کو قیمت مکسور محدود ناطق حاصل ہوگی لیکن اگر پہلی مساوات مفروضہ کی تمام قیمتین محدود اور ناطق مکسور یا صحیح تحقیق کری ہین اور اونکی موافق اجزاء ضربی مساوات سی ساقط کری ہوتی تو یہہ بات ہرگز نہ واقع ہوگی

(۲۱۷) لاگرانشز کی ترکیب مین اس بات کا واقع ہونا ممکن ہی کہ ہم کو ایسی مساوات حاصل ہو کہ وہ کسی مساوات ماقبل سی بالکل مطابقت رکھتی ہو تو اس حالت مین خارج قسمت کسر مسلسل کے مقرر واقع ہونگے اور اس سبب سی کسر مسلسل ایک کسر مکرر یا مدوروہ بنجائیگی اور اوسکی قیمت مساوات درجہ دوم کے حل کرنے سے معلوم ہوگی جبر مقابلہ کا ۴۵ باب دیکھو

اس مساوات درجہ دوم کی قیمتون مین درجہ دوم کا اصم ملتف ہوگا اور بموجب دفعہ ۴۴ کی اس مساوات کی دونو قیمتین مساوات مفروضہ کی بہی دو قیمتین ہونگین

(۲۱۸) دفعہ ۲۱۵ مین جس عمل کو تمثیلاً مساوات لا^{۳} - ۷ لا + ۷ = ۰ کی دوسری ترکیب کے اندر لکھا ہی اوسکو ہم یہان علی العموم لکھتی ہین

ہمارا بڑا مطلب ذہن میں یہہ ہی کہ جب مساوات مفروضہ کی ایک سی زیادہ قیمتیں درمیان صحاح متصلہ کی واقع ہوں تو لاگرانژ کی ترکیب کو عمل میں لائیں فرض کرو کہ ح (لا) = ۰ کہ مساوات مفروضہ ہو

اب جملی مستعان ح ۱ (لا) اور ح ۲ (لا) اور ح ۳ (لا)... سٹرم صاحب کے ضابطہ حاصل کرو اور وہاں ٹھہر جاؤ جہاں ایسا مستعان جملہ حاصل ہوجاوے کہ وہ لا کی سب قیمتوں کی واسطے مثبت ہو دفعہ ۱۹۹ دیکھو فرض کرو کہ ایک سی زیادہ قیمتیں مساوات مفروضہ کی صحاح متصلہ ا اور ا + ۱ کی درمیان واقع ہیں لا کی جگہ ا + ۱/د جملوں ح (لا) اور ح ۱ (لا) اور ح ۲ (لا)... میں رکھو اور جو انکی صورت ہو انکو ح (د) و ح ۱ (د) در ح ۲ (د)... سی تعبیر کرو اگر جملوں کے دوسرے سلسلہ میں متواتر کوئی سی ایسی دو عدد ب اور ب + ۱ رکھیں تو دونوں صورتوں میں جو تغیرات علامت ہونگی اونکا تفاوت مساوات ح (د) = ۰ کی تعداد اون قیمتوں کی ہوگی جو ب اور ب + ۱ کی درمیان واقع ہوں وجہ اسکی یہہ ہی کہ ح (د) اور ح ۱ (د) اور ح ۲ (د)... میں جو ب اور ب + ۱ کی مندرج کرنی سی نتایج حاصل ہوتی ہیں وہ وہی ہوتے ہیں جو سلسلہ ح (لا) اور ح ۱ (لا) و ح ۲ (لا)... میں جداگانہ ا + ۱/ب اور ا + ۱/(ب+۱) کے مندرج کرنی سی حاصل ہوتی ہیں اسواسطے تغیرات علامت کی تعدادوں کا تفاوت برابر مساوات ح (لا) = ۰ کی تعداد اون قیمتوں کی ہوگا کہ جو ا + ۱/ب اور ا + ۱/(ب+۱) کی درمیان واقع ہوں یعنے مساوات ح (د) = ۰ کی تعداد قیمتوں کی جو ب اور ب + ۱ کی درمیان واقع ہوں

پس اگر ہم کو یہہ دریافت ہوا کہ د کی ایک قیمت سی زیادہ قیمتیں درمیان صحاح متصلہ ب اور ب + ۱ کے واقع ہوئیں د کی جگہ ب + ۱/ی سلسلہ ح (د) اور ح ۱ (د) اور ح ۲ (د)... میں اور ی کی جگہ دو متواتر صحاح متصلہ کی رکھنی سی ہم کو یہہ دریافت ہوگا کہ ی کی ایک سی زیادہ قیمتیں دو صحاح متصلہ کے درمیان واقع ہیں یا نہیں

اسی طرح عمل کیجائیگی جب تک کہ ہم کو ایسی مساوات حاصل ہوگی کہ جسکی ایک ہی قیمت درمیان دو صحاح متصلہ

کے واقع ہون اور جب یہہ حاصل ہو جاوے تو سٹرم صاحب کی ضابطہ کے جملون کی احتیاج نہین رہیگی اور بموجب دفعہ ۲۱۲ کے اس خاص قیمت کا حساب ہو جائیگا

پس اسطرح قیمتون کو جدا جدا کر سکتی ہین اور اوسکا حساب لگا سکتی ہین اور اونمین سے کسی کو نہین چہوڑ دے

اب اگر ہم کو ح (ا) وح، (ا) ح۲ (ا) ۰۰۰ کی قیمتین دریافت کرنی منظور نہ ہون بلکہ اونکی علامتین دریافت کرنی مطلوب ہون تو ہم سب سلسلون مین ان جملون کو ی کی ایسی قوتون مین ضرب دے سکتی ہین کہ اونکو کسرون سے خاص کر دین اسواسطے کہ ی مثبت مقدار ہی فرض کی گئی ہی ہر ایک قوت اوسکی مثبت ہی مثلاً بجای ح (ی) کی یعنی بجاے ح (ا + $\frac{1}{ی}$) کے ہم یہہ لکھین کہ

$$ی^{ن} ح (ا) + ی^{ن-1} (ا) + \frac{ی^{ن-2}}{2} ح'' (ا) + \cdots + \frac{1}{\lfloor ن} ح^{ن} (ا)$$

اور ح (لا) کو ن درجہ کا فرض کرلین

سترہوان باب

نیوٹن صاحب کی ترکیب تقرب اور اوسبر فوریر کا ضمیمہ

(۲۱۹) اب ہم ترکیب تقرب نیوٹن صاحب کی لکھتی ہین جسی قیمت مساوات کی قدر عددی کا حساب تقریباً ہوتا ہے

فرض کرو کہ ح (لا) = ۰ مساوات ہی اور اوسکی ایک قیمت خاص حدود سہ اور صہ کی درمیان واقع ہی اور ان حدون مین فرق بقدر ایک چہوٹی کسر کے ہی فرض کرو کہ س ایک ایسی مقدار سہ اور صہ کی درمیان ہی کہ وہ قیمت مطلوب سی تقرب اولین رکہتی ہی اور س + ہ ٹہیک قیمت ہی ہ ایک چہوٹی سی کسر ہی جسکا تشخیص کرنا منظور ہے

پس ح (س + ہ) = ۰ یعنی بموجب دفعہ ۱۰ کے

$$ح (س) + ہ ح' (س) + \frac{ہ^2}{1 \times 2} ح'' (س) + \frac{ہ^3}{\lfloor 3} ح''' (س) + \cdots + \frac{ہ^{ن}}{\lfloor ن} ح^{ن} (س) = 0$$

اب چونکہ ہ ایک چہوٹی سی کسر فرض کی گئی ہی تو $ہ^2$ اور $ہ^3$ ۰۰۰ بمقابلہ ہ کے

نہایت چھوٹی ہونگی پس اگر دوسری قوت اور اوسی بڑی قوتون کو اوسپر کی مساوات مین ساقط کردین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$ح(س) + ھ حَ(س) = ۰$$

$$\text{پس}\quad ھ = - \frac{ح(س)}{حَ(س)}$$

تو یہہ فرض کر کے کہ ہم کو اسطرح یہہ قیمت ھ کی تقریباً دریافت ہوئی ہی $س - \frac{ح(س)}{حَ(س)}$ ایک تقرب جدید مساوات مفروضہ کا حاصل ہوا اس تقرب جدید کو س۱ سی تعبیر کرو تو موافق سابق کی عمل کرنی سی $س_۱ - \frac{ح(س_۱)}{حَ(س_۱)}$ ایک اور تقرب جدید حاصل ہوگا اور علی ہذا القیاس اب ہم اون شرائط کا امتحان کماحقہ کرتی ہین جنکی موافق یہہ ترکیب بغیر کسی خطا اور نقص کے استعمال مین آسکی اور ایسی امتحان کا ضروری ہونا ظاہر ہی کیونکہ اگر حَ(س) بمقابلہ ح(س) کی چھوٹا ہو تو قیمت تقریبی ھ کی ایک چھوٹی کسر نہین ہوگی اور چھوٹی کسر ہونا اوسکا لوازمات سے ہے

(۲۲۰) ایک مساوات پر ہم نیوٹن صاحب کی ترکیب تقرب کا امتحان کرتی ہین اور یہہ مساوات بھی ہی ہی جو خود نیوٹن صاحب نی منتخب کی ہی یعنی لا۳ - ۲ لا - ۵ = ۰ کو ح(لا) = ۰ سے تعبیر کرو یہان لا = ۲ کے ح(لا) کو منفی اور لا = ۳ کے ح(لا) کو مثبت بناتا ہے اسسے معلوم ہوا کہ مساوات ح(لا) = ۰ کی ایک قیمت ۲ اور ۳ کی درمیان واقع ہی اور لا = ۲ ½ کے ح(لا) کو مثبت بناتا ہی تو قیمت درمیان ۲ اور ۲ ½ کی واقع ہوگی اور لا = ۲٫۲ بھی ح(لا) کو مثبت بناتا ہی تو قیمت ۲٫۱ سی فرق بقدر ۰٫۱ کی بھی نہین رکھتی پس فرض کرو کہ س = ۲٫۱ تو

$$س_۱ = س - \frac{ح(س)}{حَ(س)} = س - \frac{س^۳ - ۲س - ۵}{۳س^۲ - ۲}$$

$$= ۲٫۱ - \frac{۰٫۰۶۱}{۱۱٫۲۳} = ۲٫۱ - ۰٫۰۰۵۴ \text{ تقریباً}$$

پس س۱ = ۲٫۰۹۴۶

پس ایک اور تقرب جدید کے لئے یہہ حاصل ہوگا کہ

$$س_۲ = س_۱ - \frac{ح(س_۱)}{ح'(س_۱)} = س - ۲ - ۰۰۰۰۴۸۵۲، تقریباً$$

$$= ۲،۰۹۴۵۵۱۴۸$$

(۲۲۱) یہہ عمل نظریات مین آسان ہی اور عملیات مین مشکل نہین ہی مگر اوسمین چند احتیاطین ضرور ہین تاکہ کامیابی کا اوسمین یقین ہو اب ہم ادن احتیاطون کا بیان کرتے ہین فرض کرو کہ س قدر تقریبی مساوات کی قیمت کی ہی اور $س_۱ = س - \frac{ح(س)}{ح'(س)}$ اب ہم کو یہہ یقین بغیر تحقیقات کماحقہ کی نہین ہوسکتا کہ

کہ $س_۱$ بہ نسبت س کی اصل قیمت سی اقرب ہی مثال گذشتہ مین اول ہم نی یہہ تحقیق کیا کہ ایک قیمت ۲ اور ۲،۲ کے درمیان واقع ہی اور پہر یہہ فرض کیا کہ ۲،۱ تقرب اولین ہے اور اوسی ایک تقرب جدید ۲،۰۹۴۶ استخراج کیا لیکن یہہ ہم کو تحقیق نہین ہے کہ ۲،۰۹۴۶ بہ نسبت ۲،۱ کی اصل قیمت سی اقرب ہی لیکن اگر بجای لا کی ۲،۱ کے رکہو تو ح (لا) مثبت ہوتا ہی پس قیمت مطلوب ۲ اور ۲،۱ کے درمیان واقع ہے اور اسی ہم کو معلوم ہوا کہ ۲،۰۹۴۶ بہ نسبت ۲،۲ کی اصل قیمت سی قریب تر ہی لیکن اب بہی ہم کو یہہ نہین معلوم کہ ۲،۰۹۴۶ بہ نسبت ۲،۱ کی اصل قیمت سی زیادہ قریب ہی اگر ہم ۲،۰۹۴۶ کو ح (لا) مین رکہین تو ح (لا) مثبت دریافت ہوگا تو اسی یہہ معلوم ہوتا ہی کہ قیمت ۲،۰۹۴۶ اور ۲ کے درمیان واقع ہوتا ہی پس ۲،۰۹۴۶ بہ نسبت ۲،۱ کے زیادہ قریب اصل قیمت سی ہے

(۲۲۲) فوریر صاحب نی ایک قاعدہ ایسا لکہا ہی کہ اوسکی موافق عمل کرنے سی یہہ مشقت بار بار امتحان کرنی کی نہین پڑتی جیسی کہ اوپر کی مثال مین پڑی تہی اور جب بعض شرائط پورے ہو جاتی ہین تو یہہ نیوٹن صاحب کی ترکیب اس قاعدہ سی مستند ہو جاتی ہے

نیوٹن صاحب کی ترکیب کا ضمیمہ فوریر کا جملہ معلوم کی اول جملہ مشتقہ کی ایک خاصیت پر موقوف ہے جسکو ہم ثابت کرتے ہین۔

(۲۲۳) اگر ا اور ب دو مقداریں ہوں تو کوئی مقدار درمیان ا اور ب کی ایسی ضرور ہوگی کہ

ح(ب) − ح(ا) = (ب − ا) حَ(لر)

اسواسطی کہ فرض ح (لا) بتعبیر ح(لا) − ح(ا) − (لا − ا)/(ب − ا) [ح(ب) − ح(ا)] کو کرتا ہے
تو ۰ لا = ا کے ہونی سی یا لا = ب کے ہونے سی ح (لا) معدوم ہوتا ہے اسیواسطی
بموجب دفعہ ۲۰۱ کی مساوات حَ (لا) = ۰ کی قیمت درمیان ا اور ب کی ضرور ہوگی اور
حَ (لا) = حَ (لا) − (ح(ب) − ح(ا))/(ب − ا) اسی معلوم ہوا کہ کوئی مقدار لر درمیان
ا اور ب کی ضرور ایسی ہوگی کہ حَ (لر) − (ح(ب) − ح(ا))/(ب − ا) = ۰
اسیواسطی ح (ب) − ح (ا) = (ب − ا) حَ (لر)

(۲۲۴) فرض کرو کہ ب بڑا ا سی ہی تو ح (ب) جبر مقابلہ کی اعتبار سی بڑا ح (ا) سی ہوگا
اگر حَ (لر) مثبت ہی اور چھوٹا ح (ا) سے ہوگا اگر حَ (لر) منفی ہے
اگر حَ (لا) مثبت ہی درمیان لا = ا اور لا = ب کے ہو تو حَ (لر) ضرور مثبت ہوگا
اور اگر حَ (لا) منفی درمیان لا = ا اور لا = ب کی ہو تو حَ (لر) ضرور منفی ہوگا
پس اسی یہہ نتیجہ پیدا ہوا کہ اگر ح (لا) کسی بون کے درمیان استقلال کی ساتہہ مثبت ہو
تو ح (لا) اوس بون کی درمیان لا کی ساتہہ بڑہیگا اور اگر حَ (لا) استقلالاً منفی ہو
تو ح (لا) اوس بون کی درمیان لا کی ساتہہ گہٹیگا اس کمی اور زیادتی سے مراد
ہماری جبر مقابلہ کی زیادتی اور کمی سی ہی اب ہم اپنی نتیجہ کو اسطرح بیان کیا کرتے ہیں
کہ اگر حَ (لا) کی کسی بون کی درمیان ایک ہی علامت ہو اور ح (لا) کی وہی علامت ہو جو حَ (لا) کی ہے
تو جیسا لا اوس بون کی درمیان بڑہیگا ایسا ہی ح (لا) تعداداً بڑہیگا
اور اگر ح (لا) کی علامت مخالف حَ (لا) کے علامت کے ہو تو
جیسا لا اول بون کے درمیان کہٹیگا ایسا ہی ح (لا) گہٹیگا

(۲۲۵) اب ہم فوریر کے قاعدہ کو بیان کرتی ہیں اور ثابت کرتی ہیں فرض کرو کہ ح (لا) = مساوات ہو

جسکی صرف ایک ہی قیمت درمیان سہ اور صہ کی ہو اور فرض کرو کہ حَ (لا) = ۰ سکے کوئی قیمت درمیان سہ اور صہ کی نہین ہی اور حً (لا) = ۰ کی بہی کوئی قیمت سہ اور صہ کے مابین نہین ہی تو اس حالت مین نیوٹن کی ترکیب تقرب ضرور کامیابی کے ساتہہ چلیگی اگر اوسکا اغاز وہان سی کرین جہان ح (لا) اور حً (لا) کی ایک ہی علامت ہو اور پہر اگے اوسکو جاری کرین

ہماری فرضون سی یہہ استخراج ہوتا ہی کہ ح (لا) علامت کو صرف ایک دفعہ سہ اور صہ کے درمیان بدلتا ہی اور حً (لا) اور حً (لا) اپنی علامت سہ اور صہ کے درمیان نہین بدلتی ہم صہ ــ سہ کو مثبت فرض کرینگے

(۱) فرض کرو کہ ح (لا) اور حً (لا) کی جب لا = سہ کے ہو ایک ہی علامت ہے یہہ تقرب اولین فرض کرو تو نیوٹن کے ترکیب کے موافق تقرب ثانی سہ ــ $\frac{\text{ح (سہ)}}{\text{حَ (سہ)}}$ ہے اور فرض کرو کہ سہ + ھہ قیمت کی بالکل صحیح قدر ہے تو

ح (سہ + ھہ) = ۰ اب بموجب دفعہ ۲۲۳ کے ہم کو یہہ حاصل ہے کہ

ح (سہ + ھہ) ــ ح (سہ) = ھہ حَ (لر) جہان لر درمیان سہ اور سہ + ھہ کے واقع ہی پس ھہ = ــ $\frac{\text{ح (سہ)}}{\text{حَ (لر)}}$ اور ٹہیک قدر قیمت کی سہ ــ $\frac{\text{ح (سہ)}}{\text{حَ (لر)}}$ ہے

پس ہم کو یہہ ثابت کرنا رہا کہ سہ ــ $\frac{\text{ح (سہ)}}{\text{حَ (سہ)}}$ بہ نسبت سہ کے اصلی قیمت سے زیادہ قریب ہی چونکہ ھہ ضرور ایک مثبت مقدار ہی تو ح (سہ) اور حَ (لر) کی مختلف علامتین ہین اور ح (سہ) کی وہی علامت ہی جو حً (سہ) کی علامت ہی اور اسیواسطی حَ (ا) اور حً (سہ) مختلف العلامت ہین اسی معلوم ہوا کہ حَ (لا) تعداداً ایسا کم ہوتا ہے جیسا لا درمیان سہ اور صہ کے زیادہ ہوتا ہی پس حَ (لر) تعداداً کم حَ (سہ) سی ہوا اسیواسطی ــ $\frac{\text{ح (سہ)}}{\text{حَ (سہ)}}$ ایک مثبت مقدار ہے جو تعداداً کم بہ نسبت مقدار ــ $\frac{\text{ح (سہ)}}{\text{حَ (لر)}}$ کے ہی اسی ثابت ہوتا ہے کہ نیوٹن کا تقرب ثانی

قیمت حقیقی کی قدر کے زیادہ قریب بہ نسبت تقریب اولین کے ہے

فرض کرو سہ۱ = سہ − ح(سہ)/ح′(سہ) تو ح(سہ۱) اور ح″(سہ۱) کی ایک ہی علامت ہے

اور تقریب سہ۱ سے جاری ہوتا ہے

(۲) فرض کرو کہ ح(لا) اور ح″(لا) کی جب لا = صہ کے ہو ایک ہی علامت ہے

صہ کو تقریب اولین فرض کرو تو نیوٹن صاحب کی ترکیب کے موافق تقریب ثانی صہ − ح(صہ)/ح′(صہ) ہوگا

فرض کرو کہ صہ + ھہ قیمت کی صحیح صحیح قدر ہے تو ح(صہ + ھہ) = ۰

اب بموجب دفعہ ۲۲۳ کے ح(صہ + ھہ) − ح(صہ) = ھہ ح′(لر) اسمیں لر درمیان

صہ اور صہ + ھہ کے واقع ہے پس ھہ = − ح(صہ)/ح′(لر) پس اب ہم کو یہہ ثابت کرنا رہا

کہ صہ − ح(صہ)/ح′(صہ) قیمت حقیقی کی زیادہ تر قریب بہ نسبت صہ کے ہے چونکہ ھہ ضرور

منفی ہے تو ح(صہ) اور ح′(لر) کی ایک ہی علامت ہے اور ح(صہ) کی وہی علامت ہے

جو ح″(صہ) کی علامت ہے اور اسیواسطے ح′(لر) اور ح″(صہ) کی ایک ہی علامت ہے

اسی معلوم ہوا کہ بموجب دفعہ ۲۲۴ کے کہ ح′(لا) تعداداً ایسا ہی زیادہ ہوتا ہے جیساکہ

لا درمیان سہ اور صہ کی زیادہ ہوتا ہے پس ح′(سر) تعداداً کم بہ نسبت ح′(صہ) کے ہوا

اسیواسطے ح(صہ)/ح′(صہ) ایک مثبت مقدار ہے اور تعداد چھوٹی بہ نسبت مثبت مقدار ح(صہ)/ح′(لر) کے ہے

اسی ثابت ہوتا ہے کہ نیوٹن صاحب کی ترکیب کے موافق تقریب ثانی حقیقی قیمت کے قدر کے

قریب تر بہ نسبت تقریب اولین کے ہے

فرض کرو کہ صہ۱ = صہ − ح(صہ)/ح′(صہ) تو ح(صہ۱) اور ح″(صہ۱) کی ایک ہی علامت

ہے اور تقریب صہ۱ سے آگے جاری ہوگا

(۲۲۶) دفعہ گذشتہ سے بخوبی ثابت ہوگیا کہ فوریئر نے جو شرائط لکھی ہیں وہ نیوٹن صاحب کی ترکیب تقریب

کی کامیابی کی لئے کافی ہیں جب یہہ شرائط پوری ہوجائیں اور اوس حد سے کہ جسکے موافق

ح(لا) اور ح″(لا) کی ایک ہی علامت ہو تقریب شروع ہوکر جاری ہو تو قیمتیں متواترہ حاصل

ہو نکلین جنمین سی ہر ایک قیمت کی اصل قدر تک مستواتر بڑہتی ہی بشرطیکہ حد جسکی کہ ہم چلی ہین چہوٹی
قیمت کی اصل قدر سی ہو اور گہٹتی ہی اگر حد مذکور بڑی قیمت کی اصل قدر سی ہو

اب ہم اختصار کے ساتہہ یہہ ثابت کرینگے کہ فوریر کی شرائط کا ہونا ضروری ہے

ایک قیمت مفروضہ سی ہم چلین تو نیوٹن صاحب کا تقرب ثانی $-\frac{ح(س)}{ح'(س)}$ زیادہ کرنی سی صحیح کریگا
اور قیمت کی قدر حقیقی $\frac{ح(س)}{ح'(ل)}$ کے زیادہ کرنی سی حاصل ہوگی اسی ثابت ہوا کہ ح'' (لا) کے
استواری علامت ضروری تا کہ یہہ ہم کو تحقیق ہو کہ ح (س) اور ح'' (ل) کی ایک ہی علامت ہے اگر
ان مقدارون کی ایک علامت نہ ہو تو صحت نیوطنی کی علامت غلط ہوگی اور نیوٹن کا تقرب ثانی
قیمت کی اصلی قدر سی بہ نسبت تقرب اولین کے بڑا ہوا ہوگا

استواری علامت ح' (لا) کی ضروری تا کہ اوسی یہہ تحقیق ہو کہ ح' (ل) تعداً کم بہ نسبت ح' (س) کے ہو
اگر یہ صورت نہ ہو تو صحت نیوٹنی تعداً بڑی بہ نسبت اصلی صحت کی ہوگی اور اسطرح صحت
کی ٹہیک علامت فرض کرنی سی قیمت کی حقیقی قدر درمیان نیوٹن کے تقرب اول اور دوم
کے درمیان واقع ہوگی اس حالت مین نیوٹن کا تقرب ثانی قریب تر قیمت کے حقیقی قدر کے
بہ نسبت تقرب اول کی ہو سکتا ہی مگر اوسکا ہونا کچہہ ضروری نہین

(۲۲۷) دفعہ ۲۲۰ کی مثال مین ثابت ہو سکتا ہی کہ مساوات ح (لا) = ۰ صرف ایک قیمت ۲ اور ۲٫۱
کے درمیان واقع ہی اور مساوات ح' (لا) = ۰ اور ح'' (لا) = ۰ کی کوئی قیمت ان حدود کی درمیان نہین
واقع ہوتی اور جب لا = ۲٫۱ کے ہو تو ح (لا) اور ح'' (لا) دونو مثبت ہین پس نیوٹن کی
ترکیب سے یقینی کامیابی حاصل ہوگی اگر اوسکا آغاز اور اجرا حد ۲٫۱ سے کرین

ایک اور مثال لا۳ – ۷ لا + ۷ = ۰ کی لو اسکو ح (لا) = ۰ سی تعبیر کرو امتحان سی یہہ بات ثابت
ہو سکتی ہی کہ مساوات کی ایک قیمت ۱٫۳ اور ۱٫۴ اسکے درمیان واقع ہے اور ح' (لا) = ۰
اور ح'' (لا) = ۰ کی قیمتین درمیان ان حدون کی نہین واقع ہین اور نیز
جب لا = ۱٫۳ تو ح (لا) اور ح'' (لا) دونو مثبت ہین پس اگر حد ۱٫۳ سی آغاز اور

اجرا کریں تو نیوٹن کی ترکیب تقرب سے کامیابی یقینی حاصل ہوگی

(۲۲۸) اب ہم یہ بتلائینگے کہ سرعت تقرب کا تخمینہ کسطرح ہوتا ہے فرض کرو کہ عمل کی کسی مرتبہ مین ہم کو س کے قیمت کی قدر تقریبی حاصل ہوئی ہے تو قیمت کی صحیح قدر س $-$ $\frac{ح(س)}{ح'(لر)}$ ہے

پس عددی قدر غلطی کی اس مرتبہ مین $\frac{ح(س)}{ح'(لر)}$ ہے اسکو ر سے تعبیر کرو اور اسے مابعد قدر تقریبی س $-$ $\frac{ح(س)}{ح'(س)}$ اور اب غلطی کی عددی قدر $\frac{ح(س)}{ح'(لر)} - \frac{ح(س)}{ح'(س)}$

یعنی ر $\frac{ح'(س) - ح'(لر)}{ح'(س)}$ اور بموجب دفعہ ۲۲۳ کی ہم کو معلوم ہے کہ $ح'(س) - ح'(لر) =$ $(س - لر)\,ح''(لو)$ اسمین لو درمیان س اور لر کے واقع ہوتا ہے پس غلطی

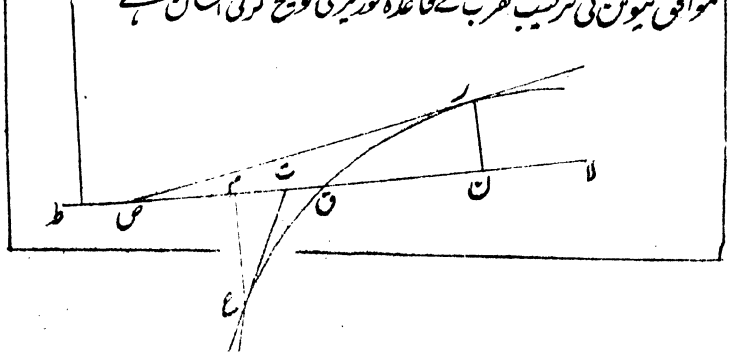
ر $\frac{(س - لر)\,ح''(لو)}{ح'(س)}$ ہے اب لر درمیان س اور قیمت کی حقیقی قدر کی درمیان واقع ہوتا ہے

پس س $-$ لر چھوٹا ر سے ہوا پس غلطی کم بہ نسبت $\frac{ر^2\,ح''(لو)}{ح'(س)}$ کے ہے اب فرض کرو کہ

ح″(لا) کی سب سے بڑی قیمت جو درمیان ان حدود کی ہو وہ سب سے چھوٹی قیمت ح′(لا) پر تقسیم کی جاوے اور خارج قسمت ق سے تعبیر ہو تو غلطی بدرجہ اولی کم ق ر² سے ہوگی

دفعہ ۲۲۰ کے مثال مین قیمت ۲ اور ۲٫۱ کے درمیان واقع ہوتی ہے

پس ق کی قیمت دریافت کرنے کی واسطے قیمت ۶ لا کو جب لا = ۲٫۱ کے ہو قیمت ۳ لا² $-$ ۲ پر جب لا = ۲ کے ہو تقسیم کرو تو ق = ۱٫۲۶ اور چونکہ ق تقریباً واحد کے برابر ہے تو ٹھیک مرتبے اعشاریہ تقرب مین قریب دو چند کے ہر دفعہ کے عمل مین ہونگے

(۲۲۹) جو خطوط منحنی کی مسائل مین اصول علم مفصولات کو کام مین لانا طالب علم جانتے ہین اسکو علم ہندسہ کے موافق نیوٹن کی ترکیب تقرب کے قاعدہ فوریر کی توضیح کرنی آسان ہے

فرض کرو کہ ع ق ایک خط منحنی کا حصہ مساوات ی = ح (لا) سے دریافت ہوتا ہے اور ی م اور ی ن ہم کو معلوم ہین اور ی ق کی قیمت دریافت کرنی ہی یعنی وہ نقطہ دریافت کرنا ہی جہان خط منحنی محور کو کاٹتا ہے

نقطہ ع پر ظاہر ہی کہ ح (لا) منفی ہی اگر ط ی محور ی کی مثبت سمت مقرر کی جاے اور ح'' (لا) بہی نقطہ ع پر منفی ہی کیونکہ خط منحنی ع پر محور لا کے لحاظ سے محدب ہے اور مماس ع ت کہنچو اور فرض کرو کہ ی م = سہ تو م ت = $-\frac{ح (سہ)}{ح' (سہ)}$ موافق علم حرسات کے ہوگا

پس م سی تقرب نیوطنی شروع ہوتا ہی اور ت کی طرف چلتا ہی اور چونکہ ت درمیان م اور ن کی واقع ہوتا ہی تو اسی ظاہر ہوتا ہی کہ ت سی اجرا ترکیب تقرب کا کامیابی کی ساتھ ہو سکتا ہے

نقطہ ر پر ح (لا) مثبت ہی اور ح'' (لا) منفی ہی مماس ر ص کہنچو اور تقرب نیوطنی ن سے شروع ہوتا ہی اور ص کی طرف جاری ہوتا ہی اور ص اور ن مختلف سمت مین ق کے واقع ہین علاوہ برین یہہ یقینی نہین ہی کہ ص ق بہ چھوٹا ق ن سی ہی اور یہہ یقینی نہین ہے کہ تقرب ص سی جاری ہوتا ہی پس تقرب ن سی شروع ہوتا ہے

طالب علم شکلین مرتسم کر کی شرط ح' (لا) اور ح'' (لا) کے حدود مذکور مین علامت نہ بدلنی کی توضیح کر سکتا ہے

اٹھارہوان باب ھورنر کی ترکیب

(۲۳۰) قیمت مساوات کی قدر تقریبا دریافت کرنی کی لئی اب ہم ترکیب تقرب وہ لکھی ہین جسکو ہورنر صاحب نی ایجاد کیا ہے

فرض کرو کہ ح (لا) = ۰ مساوات ہو تو ح (ط + لا) = ۰ وہ مساوات ہو گی جسکی قیمتین اول مساوات کی قیمتون سی بقدر ط کے کم ہونگین

مساوات ح (لا + ط) کو تشریح کر کے لکہین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

ح (ط) + لا ح′ (ط) + لا^{2} ح″ (ط) / ۲×۱ + لا^{3} ح‴ (ط) / لـ۳ + ... لا^{n} ح^{n} (ط) / لـن =

اب ہورنر صاحب کی ترکیب کا جزو اعظم یہہ ہی کہ اس آخر مساوات کی مثال کو نظم اور خوش ترتیبی سے دریافت کریں
اور اس عمل کی فایدہ مندی کا ذکر ہم نی دفعات ۱۱ اور ۱۴۲ مین کیا ہے

(۲۳۱) تمثیلاً فرض کرو

ح (لا) = ا لا^{5} + ب لا^{4} + س لا^{3} + د لا^{2} + ر لا + ف

تو ح (ط) = ا ط^{5} + ب ط^{4} + س ط^{3} + د ط^{2} + ر ط + ف

ح′ (ط) = ۵ ا ط^{4} + ۴ ب ط^{3} + ۳ س ط^{2} + ۲ د ط + ر

۱/۲ ح″ (ط) = ۱۰ ا ط^{3} + ۶ ب ط^{2} + ۳ س ط + د

۱/لـ۳ ح‴ (ط) = ۱۰ ا ط^{2} + ۴ ب ط + س

۱/لـ۴ ح⁗ (ط) = ۵ ا ط + ب

۱/لـ۵ ح (ط) = ا

(۱) ح (ط) کا حساب دفعہ ۵ کی طرح کریں تو

ا = ا

ا ط + ب = ع کے لکھو

ع ط + س = ا ط^{2} + ب ط + س = ق کے لکھو

ق ط + د = ا ط^{3} + ب ط^{2} + س ط + د = ی کے لکھو

ر ط + ی = ا ط^{4} + ب ط^{3} + س ط^{2} + د ط + ر = ص کے لکھو

ص ط + ف = ا ط^{5} + ب ط^{4} + س ط^{3} + د ط^{2} + ر ط + ف = ح (ط)

یہاں ہر سطر اسطرح حاصل ہوتی ہی کہ ماقبل کی سطر کو ط مین ضرب دی اور حاصل ضرب پر
مقادیر ب اور س اور د اور ر اور ف کو زیادہ کیا ہے

(۲) ح′ (ط) کا حساب بہی اسطرح کریں جسطرح ح (ط) کا حساب کیا ہی اور ا و ع و ق و ر

اور ص کو بجای ا و ب و س اور د اور ر کے کام مین لائین

ا = ا

ا ط + ع = ۲ ا ط + ب = س کے لکھو

س ط + ق = ۳ ا ط^۲ + ۲ ب ط + س = جر کے لکھو

جر ط + ی = ۴ ا ط^۳ + ۳ ب ط^۲ + ۲ س ط + د = سر کے لکھو

سر ط + ص = ۵ ا ط^۴ + ۴ ب ط^۳ + ۳ س ط^۲ + ۲ د ط + ر = حَ ط

(۳) ۱/۲ ح'' (ط) کا حساب مثل ح (ط) کے کرو اور حروف ا اور بر و جر و سر کو کام مین لاؤ تو

ا = ا

ا ط + بر = ۳ ا ط + ب = شر کے لکھو

شر ط + جر = ۶ ا ط^۲ + ۳ ب ط + س = صر کے لکھو

صر ط + سر = ۱۰ ا ط^۳ + ۶ ب ط^۲ + ۳ س ط + د = ۱/۲ ح'' (ط)

(۴) اسیطرح ۱/۲۳ ح''' (ط) کا حساب کرو اور ا د سر و صر کو کام مین لاؤ

ا = ا

ا ط + سر = ۴ ا ط + ب = فر کے لکھو

فر ط + صر = ۱۰ ا ط^۲ + ۴ ب ط = ۱/۲۳ ح''' (ط)

(۵) اب ۱/۲۳۴ ح'''' (ط) کا اسیطرح حساب کرسکتی ہین ا اور فر کو کام مین لاؤ

ا = ا

ا ط + فر = ۵ ا ط + ب = ۱/۲۳۴ ح'''' (ط)

(۶) آخر ا = ۱/۲۳۴۵ ح''''' (ط)

اوپر کے عمل کو اس ترتیب سے لکھو تو نہایت آسانی ہوگی

ا	ب	س	د	ر	ت
	اط	ع ط	ق ط	ی ط	ص ط
	ع	ن	ی	ص	ح ط
	اط	ر ط	ح ط	س ط	
	ر	ح	س	ح (ط)	
	اط	س ط	ص ط		
	ش	ص	½ ح″ (ط)		
	اط	ف ط			
	ف	⅓ ح‴ (ط)			
	اط				
	¼ ح⁗ (ط)				

ہر خط عرضی کے نیچے اوسی اوپر کے دو مقداروں کا حاصل جمع لکھا ہے

پس ہم نی ترکیب ہورنر کی عمل کی مساوات ح (ط + لا) = ۰ کی مثال بنائی کی جب وہ پانچوین درجہ کی ہو بتلادی خواہ مساوات کا درجہ کچھ ہی ہو عمل یہی ہوگا

(۲۳۲) مثلاً فرض کرو کہ ہم کو ایک مساوات معلوم ہی جسکی ایک قیمت ۳۰۰ اور ۴۰۰ کی درمیان واقع ہے ایک دوسری مساوات بناؤ جسکی قیمتین بہ نسبت اول مساوات کی لقدر ۳۰۰ کی کم ہون تو دوسری مساوات کی قیمتین ۰ اور ۱۰۰ کے درمیان واقع ہونگین اور امتحان سی یہہ دریافت کرو کہ ۱۰ کا کونسا بڑی سی بڑا اضعاف اس قیمت مین شامل ہی فرض کرو کہ وہ ۷۰ ہے اب تیسری مساوات بناؤ جسکی قیمت دوسری مساوات سی لقدر ۷۰ کے کم ہو تو اس تیسری مساوات کی قیمتین ۰ اور ۱۰ کے درمیان واقع ہونگین اب امتحان سی یہہ دریافت کرو کہ قیمت مین کونسا بڑی سی بڑا صحیح عدد شامل ہی فرض کرو کہ وہ ۲ ہے اب چوتھی مساوات بناؤ جسکی قیمت تیسری مساوات سی لقدر ۲ کے کم ہو تو اس چوتھی مساوات کی قیمت ۰ اور ۱ کے درمیان واقع ہونگین اب امتحان سی یہہ دریافت کرو کہ کتنی دسوین حصہ زیادہ سی زیادہ اس قیمت مین شامل ہین فرض کرو کہ وہ آٹھہ دسوین ہین تو اس پانچوین ساوات کی قیمت ۰ اور ۱ کے

درمیان واقع ہی اور امتحان سی دریافت کرو کہ زیادہ سی زیادہ کتنی سوین حصہ اس قیمت مین شامل ہین فرض کرو کہ ستاسوین حصی ہین

اول فرض کرو کہ ۷۰۰، قیمت پانچوین مساوات کی ہی تو اسی یہہ معلوم ہوتا ہے کہ ۷۸،۲۷۳ ٹھیک قیمت اول مساوات کی ہے

دوم فرض کرو کہ ۰، ٹھیک قیمت مساوات پنجم کی نہین ہے تو اسی یہہ مستنبط ہوگا کہ ایک مساوات ہے جسکی قیمتین مساوات اول کی قیمتون سی بقدر ۷۸،۲۷۳ کے چھوٹی ہین اور اوسکی قیمت ۰ اور ۱۰، کے درمیان واقع ہی پس مساوات اول کی قیمت ۷۸،۲۷۳۱ اور ۸۸،۲۷۳ کے درمیان واقع ہے

پس اسی معلوم ہوتا ہی کہ ایک سلسلہ اوس قسم کی قیمتون کا جسکا ذکر ۲۳۱ مین ہوا اس طرح حاصل ہوتا ہی اور اوس سے حقیقی قیمت یا تقریبی قیمت خاطر خواہ دریافت ہوجاتی ہے

(۲۳۳) ہم نی دفعہ گذشتہ مین یہہ بیان کیا ہی کہ بعض اعداد امتحان سی دریافت ہوتی ہین اب ہم یہان ایک طریقہ ان امتحانون کی ہدایت کی لئی بتلائینگے فرض کرو کہ ح (لا) = ۰ مساوات مفروضہ ہو اور ایک یا زیادہ عملون سی ہم نی ایک مساوات ایسی حاصل کی جسکی قیمتین مساوات مفروضہ کی قیمتون سی بقدر س کی کم ہون یعنی یہہ فرض کرو کہ ہم مساوات ح (س + لا) = ۰ کی حاصل کرین اور فرض کرو کہ اس مساوات کی ایک قیمت چھوٹی سی ہے تو س اس مساوات کی ایک قیمت تقریبی ہوگی

پس اسی معلوم ہوا کہ موافق باب گذشتہ کی اکثر قیمت سی س − $\frac{ح (س)}{ح' (س)}$ اقرب ہوگا پس − $\frac{ح (س)}{ح' (س)}$ اوس عدد کی قدر تقریباً ہوگی جسکو اجزاء عمل کے واسطی ہم تلاش کر رہی ہے

(۲۳۴) مثال فرض کرو کہ ح (لا) = ۲ لا^{۳} − ۳،۷۴ لا^{۲} − ۴،۲۳ لا − ۱۱،۷ اب امتحان سے معلوم ہوتا ہی کہ ح (۲۰۰) منفی ہی اور ح (۳۰۰) مثبت ہی پس مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمت درمیان ۲۰۰ اور ۳۰۰ کے واقع ہی اب ہم وہ عمل کرتی ہین جسی قیمتون

قیمتوں میں سی ہر ایک قیمت بقدر ۲۰۰ کے کم ہوجائی

۲۰۰) -۷۱۱	-۲۳۴	-۴۷۳	۲
-۲۹۶۶۸۰۰	-۱۴۶۰۰	۴۰۰	
-۲۹۶۷۵۱۱	-۱۴۸۳۴	-۷۳	
	۶۵۴۰۰	۴۰۰	
	۵۰۵۶۶	۳۲۷	
		۴۰۰	
		۷۲۷	

اسی معلوم ہوا کہ مساوات ح(لا) = ۰ کی قیمتوں سی جس مساوات کی قیمتیں بقدر ۲۰۰ کی کم ہیں وہ یہہ ہے کہ

۲ لا۳ + ۷۲۷ لا۲ + ۵۰۵۶۶ لا - ۲۹۶۷۵۱۱ = ۰ پس

ح (۲۰۰) = - ۲۹۶۷۵۱۱ اور حَ (۲۰۰) = ۵۰۵۶۶

اسی معلوم ہوا کہ - ح(۲۰۰) / حَ(۲۰۰) زیادہ قریب بہ نسبت ۵۰ کی ہی پس اب مساوات کی قیمتوں میں سے ہر ایک قیمت کو بقدر ۵۰ کے کم کرتے ہیں

۵۰) -۲۹۶۷۵۱۱	۵۰۵۶۶	۷۲۷
۴۵۹۵۸۰۰	۴۱۳۵۰	۱۰۰
۱۶۲۸۲۸۹	۹۱۹۱۶	۸۲۷

اسطرح سی ہم کو ۵۰ بہت بڑا عدد حاصل ہوا اسواسطی ح (۲۵۰) = ۱۶۲۸۲۸۹ مثبت ہی اور ح (۲۰۰) منفی ہی پس قیمت چھوٹی ۲۵۰ سے ہوئی دفعہ ۲۳۳ کی ہدایت پر چلنی سی اگر ہم ایک بڑا عدد امتحان کی واسطی تجویز کرینگی اور خاص کر ابتدائی عمل میں تو یہہ ضرور ہوگا اسی طرح کی کیفیت عدد کی جذر نکالنی میں واقع ہوتی ہی کہ ہم ایک بڑا عدد جذر میں تجویز کرتے ہیں جسی جذر نہیں نکلتا

اب ہم ۴۰ پر امتحان کرینگے

-۲۹۶۷۵۱۱	۵۰۵۶۶	۷۲۷	۲
۳۳۱۳۸۴۰	۳۲۲۸۰	۸۰	
۳۴۶۳۲۹	۸۲۸۴۶	۸۰۷	

پس ۴۰ بھی بہت بڑا ہے کیونکہ ح (۲۴۰) مثبت ہے

اب ہم ۲۳۰ پر امتحان کرتے ہین

۲	۷۲۷	۵۰۵۶۶	-۲۹۶۷۵۱۱
	۶۰	۲۳۶۱۰	۲۲۲۵۲۸۰
	۷۸۷	۷۴۱۷۶	-۷۴۲۲۳۱
	۶۰	۲۵۴۱۰	
	۸۴۷	۹۹۵۸۶	
	۶۰		
	۹۰۷		

پس ح (۲۳۰) = -۷۴۲۲۳۱ منفی مقدار ہی پس ۲۳۰ ایک مناسب عدد ہے
پس مساوات جسکی قیمتین مساوات ح (لا) = ۰ کے قیمتون سے بقدر ۲۳۰ کے کم ہین
وہ یہہ ہے کہ ۲ لا^{۳} + ۹۰۷ لا^{۲} + ۹۹۵۸۶ لا - ۷۴۲۲۳۱ = ۰

یہان حَ (۲۳۰) = ۹۹۵۸۶ پس $-\frac{\text{ح}(۲۳۰)}{\text{حَ}(۲۳۰)}$ = ۷ کے تقریباً
اب مساوات کی قیمتین بقدر ۷ کے گھٹاتے ہین

۲	۹۰۷	۹۹۵۸۶	-۷۴۲۲۳۱ (۷
	۱۴	۶۴۴۷	۷۴۲۲۳۱
	۹۲۱	۱۰۶۰۳۳	۰

اسی ثابت ہوتا ہے کہ ح (۲۳۷) = ۰ پس ۲۳۷ ایک قیمت اصل مساوات کی ہے
کل عمل کو اکثر اسطرح کیا کرتے ہین

۲	-۴۷۳	-۲۳۴	-۷۱۱ (۲۳۷
	۴۰۰	-۱۴۶۰۰	-۲۹۶۶۸۰۰
	-۷۳	-۱۴۸۳۴	* -۲۹۶۷۵۱۱
	۴۰۰	۶۵۴۰۰	۲۲۲۵۲۸۰
	* ۳۲۷	* ۵۰۵۶۶	+ -۷۴۲۲۳۱
	۴۰۰	۲۳۶۱۰	۷۴۲۲۳۱
	۷۲۷	۷۴۱۷۶	
	۶۰	۲۵۴۱۰	
	۷۸۷	حَ ۹۹۵۸۶	
	۶۰	۶۴۴۷	
	۸۴۷	۱۰۶۰۳۳	
	۶۰		
	۹۰۷ ٭		
	۱۴		
	۹۲۱		

جہاں نشان * کیا گیا ہے وہاں پہلا جز عمل کا ختم ہوتا ہی اور جہاں نشان ≠ ہی وہاں دوسرا جز عمل کا تمام ہوتا ہے

(۲۳۵) اب ہم مثال (۱) ایک ایسی مساوات کی لکھتی ہیں کہ جسکی قیمت ناطقہ محدود نہیں ہی فرض کرو کہ

ح (لا) = لا۳ − ۳ لا۲ − ۲ لا + ۵ امتحان سی یہہ معلوم ہوتا ہی کہ ح (۳) منفی اور

ح (۴) مثبت ہی پس مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمت ۴ اور ۳ کے درمیان ہے

پس عمل اس قیمت کی تقرب کا تین مرتبہ کی اعشاریہ تک یہہ ہوگا

۳٫۱۲۸	۵	−۲	۱ −۳
	−۶	۰	۳
	−۱ *	−۲	۰
	۰٫۷۶۱	۹	۳
	−۰٫۲۳۹	۷ *	۳
	۰٫۱۶۷۱۲۸	۰٫۶۱	۳
	−۰٫۰۷۱۸۷۲ ≠	۷٫۶۱	۶ *
	۰٫۰۶۸۲۷۳۱۵۲	۰٫۶۲	۰٫۱
	−۰٫۰۰۳۵۹۸۸۴۸	۸٫۲۳ +	۶٫۱
		۰٫۱۲۶۴	۶٫۲
		۸٫۳۵۶۴	۶٫۳ +
		۰٫۱۲۶۸	۰٫۰۲
		۸٫۴۸۳۲ ≠	۶٫۳۲
		۰٫۰۵۰۹۴۴	۰٫۰۲
		۸٫۵۳۴۱۴۴	۶٫۳۴
		۰٫۰۵۱۰۰۸	۰٫۰۲
		۸٫۵۸۵۱۵۲	۶٫۳۶ ≠
			۰٫۰۰۸
			۶٫۳۶۸
			۰٫۰۰۸
			۶٫۳۷۶
			۰٫۰۰۸
			۶٫۳۸۴

اب قیمت کے دوسرے ہندسہ کے دریافت کرنے کے واسطے − $\frac{۱}{۶}$ ہم کو حاصل ہے پس ۰٫۱ سب سی زیادہ قریب عدد امتحان کرنی کی لئی ہی اور قیمت کی تیسرے ہندسہ کے دریافت کرنی کی واسطے − $\frac{۰٫۲۳۹}{۸٫۲۳}$ ہی پس ۰٫۰۲ سب سے زیادہ عدد قریب امتحان کے واسطے ہے اور قیمت کی چوتھی ہندسہ کی دریافت کرنی کی واسطی − $\frac{۰٫۰۷۱۸۷۲}{۸٫۴۸۳۲}$ ہم کو حاصل ہوتا ہے پس ۰٫۰۰۸ سب سی زیادہ قریب عدد امتحان کی واسطی ہی ان سب صورتوں میں جس عدد

بیان کیا ہے وہ درست بیٹھا ہے

(۲۳۶) دفعہ گذشتہ مین جو مساوات لکھی ہی اوسکو دوسری مثال سمجھو اور اوسکی قیمت ۱ اور ۲ کے درمیان دریافت کرو

۱ | ۳-
۱
۲-
۱
۱-
۱
۰۰ *
۲
۲
۲
۴
۲
۶۰۰
۱
۶۰۱
۱
۶۰۲
۱
۶۰۳۰ ‡
۶
۶۰۳۶
۶
۶۰۴۲
۶
۶۰۴۸

۲-
۲-
۴-
۱-
۵۰۰- *
۴
۴۹۶-
۸
۴۸۸۰۰۰- ×
۶۰۱
۴۸۷۹۳۹۹-
۶۰۲
۴۸۷۸۷۹۷۰۰ ‡
۳۶۲۱۶
۴۸۷۸۴۳۴۸۴-
۳۶۲۵۲
۴۸۷۸۷۲۳۲-

۵) ۱٫۲۰۱۶
۴-
۱۰۰۰ *
۹۹۲-
۸۰۰۰۰۰۰
۴۸۷۹۳۹۹-
۳۱۲۰۶۰۱۰۰۰ +
۲۹۲۷۰۶۰۹۰۴-
۱۹۳۵۴۰۰۹۶

اس دفعہ اور دفعہ ۲۳۵ کی ترتیب مین فرق اس بات سی پیدا ہوتا ہے کہ عمل مین یہہ اکثر دستور ہی کہ علامت عشاریہ کی ساقط اوسطرح کر دیتی ہین جسطرح کہ اعداد کی تقریبی جذر کی نکالنی مین قیمت مین جو جزو عشاریہ ہو اوسکی واسطی یہہ قاعدہ کافی ہے کہ جب تمام ہندسی صحیح عدد کے قیمت مین معلوم ہو جائین اور کسر عشاریہ کے پیدا ہونے کی نوبت پہونچی تو وہان عمل کی اول خانہ مین دائین طرف ایک صفر لگاؤ اور عمل کے دوسرے خانہ مین دو صفر اور تیسرے خانہ مین تین صفر اور علی ہذا القیاس اگر اور خانی عمل کی تین سے

زائد ہون اور پہر عمل ایک دفعہ کا اسطرح کرو کہ گویا سب ہی ہندسی قیمت کی اعداد صحاح ہی تہی اور پہر صفرون کا الحاق موافق سابق کی عمل مین لاؤ

اب اس بات پر غور کرو کہ قیمت مین جب ۲ نکل چکی بعد اوسکی جو ہندسہ مثل صحیح کی تقریباً تجویز ہوگا وہ $-\frac{۸۰۰۰}{۴۸۸۰۰}$ ہی اور یہہ ایک سی کم ہی پس ایک صفر قیمت مین لگاؤ اور اول خانہ عمل مین ایک صفر اور دو اور زیادہ صفر دوسرے خانہ عمل مین اور تین اور زیادہ تیسرے مین الحاق کرو اور عمل موافق سابق کی کرو

یہہ امر ظاہر ہی کہ مسئلہ گذشتہ مین اول خانہ مین عمل کا اختصار ہوسکتا تہا کیونکہ یہہ کافی تہا کہ جو نتایج عمل ہون اونکو لکہین اور ساتھ ساتھ عمل کو ذہن مین کرین مگر ہم نی صاف صاف سمجہانے کے واسطے کل عمل کی صورت مفصل لکہی ہی لیکن اوسکا اختصار نہین کیا

(۲۳۷) جب قیمت مین بعض ہندسی نکل آئی تو عمل مختصر کی اعانت سے اور ہندسی قیمت کی دریافت ہوجاتے ہین اس کی مثال مساوات لا^۳ + ۳ لا^۲ − ۲ لا − ۵ = ۰ کی مثبت قیمتون کے دریافت کرنے مین دیتی ہین قیمت مین پانچ مرتبی اعشریہ کی جب تک ہم کو دریافت ہونگی عمل تمام اور کمال کرینگے

۱	۲ −	۵ − (۱٫۳۳۰۰۵۱
۳	۴	۲
۱	۲	۳۰۰۰ −
۴	۵	۲۶۶۷
۱	۷۰۰	۳۳۳۰۰۰ −
۵	۱۸۹	۳۳۲۳۳۷
۱	۸۸۹	۶۶۳۰۰۰۰۰۰ −
۶۰	۱۹۸	۵۶۴۳۵۲۵۱۲۵
۳	۱۰۸۷۰۰	۹۸۶۴۷۲۴۸۷۵ −
۶۳	۲۰۷۹	
۳	۱۱۰۷۷۹	
۶۶	۲۰۸۸	
۳	۱۱۲۸۶۷۰۰۰۰۰۰	
۶۹۰	۳۴۹۵۰۲۵	
۳	۱۱۲۸۷۰۴۹۵۰۲۵	
۶۹۳	۳۴۹۵۰۵۰	
۳	۱۱۲۸۷۳۹۹۰۰۷۱	
۶۹۶		
۳		
۶۹۹۰۰۵		

۶۹۹۰۰۵
۵
۶۹۹۰۱۰
۵
۶۹۹۰۱۵

اختصار عمل کا قاعدہ یہہ ہی کہ ہر دفعہ کی عمل مین ایک ہندسہ عمل کی اخر خانہ مین اول سی دور کرو مگر ایک اور اخر خانہ عمل مین سی دو ہندسی مگر دو اور علی ہذا لقیاس اب وہی مثال لیتی ہین جو اوپر بیان ہوئی اور اس مختصر قاعدہ کو عمل مین لاتی ہین

۱ ۶۹۹۰۱۵ ۱۱۲۸۷۳۹۹۰۰۷۵ ۹۸۶۴۷۵۲۴۸۷۵ (۱٫۳۳۰۰۵۸۷۳

۵۵۹۲۱ ۹۰۲۹۹۶۳۹۴۳۲
۱۱۲۸۷۴۵۴۹۲۹ ۸۳۴۷۸۸۵۴۴۳
۵۵۹۲۱ ۷۹۰۱۲۶۱۰۱۸
۱۱۲۸۷۵۱۰۸۵۰ ۴۴۶۶۲۴۴۲۵
۴۸۹ ۳۳۸۶۲۵۶۲۴
۱۱۲۸۷۵۱۵۷۴ ۱۰۷۹۹۸۸۰۱
۴۸۹
۱۱۲۸۷۵۲۰۶۳
۲
۱۱۲۸۷۵۲۰۸
۲
۱۱۸۷۵۲۱۰

اوس مقام پر جہان پورا عمل ختم ہوتا ہی ہندسہ اخری ۸ تجویز ہوا ہے اب ہم ۵ کو اخر خانہ عمل کے اغاز سے ساقط کرتی ہین الا ایک اور ۱۵ اخر خانہ عمل کے اغاز سی لفظ کرتی ہین الا دو اول مرتبہ مین اجزا عمل کے ۶۹۹ کو ۸ مین ضرب دی اور حاصل ضرب کو عمل کی خانہ اخری مین لکہا حاصل ضرب ۵۵۹۲۱ سمجہا گیا ہی اسلئی کہ ۶۹۹۰۱ کو ۸ مین ضرب دی ہی اور اول ہندسہ کو الگ کر لیا ہی پس ۵۵۹۲۱ نسبت اصل قیمت کے ۵۵۹۲۰ سی زیادہ قریب ہی پس ۵۵۹۲۱ کو ۱۱۲۸۷۳۹۹۰۰۷ پر زیادہ کرو اکائی کی مرتبہ کا ہندسہ ہم نی ۹ لکہا ہی اسلئی کہ ہم نی پانچ کے ساقط کرنے کی رعایت رکہی ہی * سی یہہ معلوم ہوتا ہی کہ اول مرحلہ عمل مختصر کا یہان ختم ہوا ہی اب ۰ کو دوسری خانہ عمل سی ساقط کرو اور ۹ اول خانہ عمل سی تو اول خانہ عمل مین مختصر ہو کر ۶۹ رہ جائینگے

اب ہندسہ آخری قیمت کا ۷ ہی اور مرحلہ عمل کا وہان ختم ہوتا ہی جہان ہیملر نشان ہے
اب ۳ کو دوسرے خانہ عمل مین سی ساقط کرد اور ۶۹ کو اول خانہ عمل مین سی تو اول خانہ عمل نابود
ہوجایگا مگر پہر بہی کچھہ اثر قیمت کی ہندسہ آخری ۳ پر کریگا اور جب ۶۹ کو ۳ مین ضرب دین
اور دو ہندسی ساقط کرین تو ۲ باقی رہینگے
اب دو خانہ عمل کی باقی رہی ہین اور باقی عمل کی بالکل مطابق تقسیم مختصر کی قاعدہ معمولی کی ہی
اور اوسی اٹھہ ہندسی اور قیمت مین مستنبط ہونگے

۱٫۳۳۳۰۰۵۸۷۳۹۵۶۷۹۲۵) ۱۰۷۹۹۸۸۰۱ −	۱۱۲۸۷۵۲۱و۰
۱۰۱۵۸۷۶۸۹	
۶۴۱۱۱۱۲ −	۱۱۲۸۷۵۲و۱
۵۶۴۳۷۶۱	۱۱۲۸۷۵و۲
۷۶۷۳۵۱ −	
۶۷۷۲۵۱	۱۱۲۸۷و۵
۹۰۱۰۰ −	
۷۹۰۱۳	۱۱۲۸و۷
۱۱۰۸۷ −	
۱۰۱۵۸	۱۱۲و۸
۹۲۹ −	
۹۰۲	۱۱و۲
۲۷ −	
۲۲	۱و۱
۵ −	

اس تقریب پر اعتبار اخر ہندسہ تک ہوسکتا ہی اور کم از کم درجہ اس اعتبار کا یہہ ہے کہ اخر ہندسہ صحیح کو خارج کر دیں
اسواسطے کہ اگر کل عمل تمام و کمال کیا جاتا تو اخر خانہ عمل مین بہت سی ہندسی اون ہندسون
کی دائین طرف ہوتی جواب لکہی ہوئی ہین مگر وہ ہندسی جواب لکہی ہوئے ہین تو اوسکی مقامات
مین کچھہ تغیر نہین واقع ہوگا لیکن شاید تغیر ہو تو فقط اتنا ہوگا کہ بعض سطرون کے اخر ہندسہ مین
دوسری سطر کے اخر ہندسے سے بقدر ایک کے فرق رہے

(۲۳۸) دفعہ گذشتہ مین جو قیمت دریافت ہوئی ہی وہ مساوات لا^{۳} − ۳لا^{۲} − ۲لا + ۵ = ۰
منفی قیمت کی قدر عددی ہی پس اسی معلوم ہوا کہ دفعات ۲۳۵ اور ۲۳۶ مین جو قیمتین دریافت ہوئین

وہ دفعہ ۲۳۷ کے دریافت شدہ قیمتوں سی بقدر ۳ کے زیادہ ہون کیونکہ مساوات کی تینون قیمتین مع اپنی مناسب علامتون کی ملکر برابر ۳ کے ہین

اگر تینون قیمتون کو تقریباً دریافت کرکی جمع کرینگے تو اوسکا مجموعہ بہی تقریباً ۳ ہوگا طالب علم کو چاہیی کہ وہ دو تقریبی مثبت قیمتون مین بہت سی مراتب عشاریہ کی نکالی تاکہ ان دو قیمتون اور دفعہ ۲۳۷ سی جو قیمت دریافت ہوا اونکی مجموعہ مین تعلق صاف ثابت ہو

(۲۳۹) ہورنر صاحب کی ترکیب مین جو مشقت شاقہ اٹہانی پڑتی ہی اوسکی واسطی بہت سے مہندسین نی اپنی اپنی رای دی ہی اون رای مین ایک رای ہم یہہ نقل کرتی ہین کہ چونکہ یہہ عمل ایسا ہے کہ جسکو اکثر آدمی نہین کر سکتی اسلیی اوسکا اختصار بہی کسی کام کا نہین ہی جتنی قاعدی اوسکی مختصر بنانی کی بیان ہوئی ہین اون سب مین محاسب اوس ترکیب کی یکرنگی کو بہولتا ہے اور یہہ مختصر قاعدہ محاسب کے امداد نہین کرتی بلکہ اوس خود ترکیب ہی کو بہولاتی ہین

(۲۴۰) دفعہ ۲۳۱ مین ہم نی بیان کیا تہا کہ ہورنر صاحب کی ترکیب مساوات ح (لا + ط) بنانی کی علی العموم درست اور صحیح ہی اب اس بات کو ثابت کرتی ہین

فرض کرو کہ $ح(لا) = ع_{.} لا^{ن} + ع_{۱} لا^{ن-۱} + ع_{۲} لا^{ن-۲} + \cdots + ع_{ن-۱} لا + ع_{ن}$

لا کی جگہ ی + ط لکہو تو ح (لا) یہہ ہوجایگا کہ

$$ق_{.} ی^{ن} + ق_{۱} ی^{ن-۱} + ق_{۲} ی^{ن-۲} + \cdots ق_{ن-۱} ی + ق_{ن}$$

اب ہم کو یہہ ثابت کرنا ہی کہ $ق_{ن}$ اور $ق_{ن-۱}$ ..... $ق_{۱}$ و $ق_{.}$ ہورنر صاحب کے عمل سی دریافت ہوجائنگے اب یہہ ظاہر ہی کہ $ق_{.} = ع_{.}$ چونکہ $ی = لا - ط$ تو یہہ جملے تطابق کے سبب سے آپسمین برابر ہونگے

$$ع_{.} لا^{ن} + ع_{۱} لا^{ن-۱} + ع_{۲} لا^{ن-۲} \cdots ع_{ن-۱} لا + ع_{ن}$$

اور $ق_{.} (لا - ط)^{ن} + ق_{۱} (لا - ط)^{ن-۱} + ق_{۲} (لا - ط)^{ن-۲} \cdots ق_{ن-۱} (لا - ط) + ق_{ن}$

اسیواسطی جب ح (لا) کو لا - ط پر تقسیم کرینگے تو باقی $ق_{ن}$ رہیگی اور خارج قسمت پیدا ہوگا

وہ تطابق کی حیثیت سے برابر

$$ق_{.}(لا-ط)^{ن-۱} + ق_{۱}(لا-ط)^{ن-۲} + ق_{۲}(لا-ط)^{ن-۳} + ق_{۳}(لا-ط)^{ن-۴} + \ldots + ق_{ن-۱}$$

ہوگا اب اخر جملہ کو جب لا - ط پر تقسیم کرینگے تو باقی ق ن-۱ بچیگی اور خارج قسمت جو پیدا ہوگا وہ تطابق کی حیثیت سے برابر

$$ق_{.}(لا-ط)^{ن-۲} + ق_{۱}(لا-ط)^{ن-۳} + ق_{۲}(لا-ط)^{ن-۴} + \ldots ق_{ن-۲}$$

ہوگا اب اخر جملہ کو جب لا - ط پر تقسیم کرینگے تو باقی ق ن-۲ بچیگی اور خارج قسمت جو پیدا ہوگا وہ تطابق کی حیثیت سی برابر

$$ق_{.}(لا-ط)^{ن-۳} + ق_{۱}(لا-ط)^{ن-۴} + ق_{۲}(لا-ط)^{ن-۵} + \ldots + ق_{ن-۳}$$

ہوگا اور علے ہذا القیاس

بس ق ن و ق ن-۱ و ق ن-۲ و ق ن-۳ . . . متواتر باقیات ح (لا) کو لا - ط پر تقسیم کرنی سی اور پہر خارج قسمت جو پیدا ہوا وسکو لا - ط پر تقسیم کرنی سی اور پہر خارج قسمت جدید کو لا - ط پر تقسیم کرنیسے حاصل ہوتی ہین اور بموجب دفعات ۵۷ و ۵۹ کی ہم کو یہہ معلوم ہوتا ہے کہ ہورنر صاحب کی عمل سی یہہ باقیات متواترہ متعین ہوتی ہین

(۲۴۱) معادلات کی حقیقی قیمتوں کے تقریباً دریافت کرنی کی بحث ہم نی کافی اور وافی لکہی ہی مگر ابتک کوئی اسان ترکیب علی ساواتوں کی خیالی قیمتوں کے دریافت کرنی کی نہین ایجاد ہوئی مگر یہان ایک ترکیب نظری ایسی ہے کہ وہ موقوف اوس ترکیب پر ہے جو ابہی بیان ہوئی دلیل اسکی یہہ ہی کہ فرض کرو $ط + ص \sqrt{-1}$ مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمت ہی بس اس سبب سی کہ ح $(ط + ص \sqrt{-1})$ کا جزو حقیقی اور جزو خیالی جدا جدا معدوم ہونا چاہی اسواسطی ہم کو دو نتیجے حاصل ہونگے اونکو ع = ۰ اور ق = ۰ سی مثل دفعہ ۱۴۱ کے تعبیر کرو

یہان ع اور ق قیمتین ط اور ص کی ہونگے اور اگر ہم ط یا ص کو مساوات ع = ۰ اور ق = ۰ سی خارج کرین اور ایک مساوات ایک مجہول کی دریافت کرین تو اس مساوات

کی ہم کو اصلی قیمتین دریافت کرنی مطلوب ہون لیکن اسی معلوم ہوا کہ مساوات معلوم کی ہم
ناممکن قیمتین اسطرح دریافت کرسکتی ہین کہ ایک اور خاص مساوات بنائین اور اوسکی اصل قیمتین
دریافت کرین ایندہ ہم ثابت کرینگے کہ اون دو مجہول کی مساواتون مین سی ایک مجہول کو
دور کرکی کسطرح ایک مجہول کی مساوات بنانی ہین اکیسوین باب مین معادلات کی ناممکن قیمتون
کی دریافت کرنی کی ایک اور ترکیب لکھینگی طالب علم کو چاہیی کہ وہ رتھر فورد کی اوس مضمون کو
دیکھی جسمین اونھون نی اعدادی مساواتون کی حل کرنی کی ترکیب کامل بیان کی

اونیسوان باب قیمتون کی بالقرینہ جملی

(۲۴۲) ایک جملہ دو یا زیادہ مقدارون کا بالقرینہ اون مقادیر کے لحاظ سی کہلاتا ہے
جو اوسمین اسطرح واقع ہون کہ اگر اونمین سی دو دو مین تبادل ہو تو جملہ نہ متبدل ہو
مثلاً $+ ا^۲ + ب^۲ + س^۲$ جملہ بالقرینہ تین مقادیر ا و ب و س کا ہے
اور نیز $اب + ب س + ح ا$ یہی جملہ بالقرینہ اونہین مقادیر کا ہی اسواسطے کہ اگر ا اور ب اور س مین
دو دو کے اندر تبادل ہو تو جملہ متبدل نہین ہوتا

(۲۴۳) مساوات کی امثال جملی بالقرینہ اوسکی قیمتون کی ہوتے ہین

اسواسطی کہ بموجب دفعہ ۲۴۵ کے مساوات $لا^ن + ع_۱ لا^{ن-۱} + ع_۲ لا^{ن-۲} \ldots = ۰$ مین
$-ع_۱$ = مجموعہ قیمتون کے
$ع_۲$ = دو دو قیمتون کی حاصل ضربون کے مجموعہ کے
اور علی ہذا القیاس اور یہہ امر ظاہر ہی کہ جو جملی قیمتون کی یہان واقع ہوتی ہین جملے بالقرینہ ہوتے ہین

اس باب کا مطلب اعظم یہہ ہی کہ ہم یہہ ثابت کرین کہ ہر یک جملہ بالقرینہ ناطقہ مساوات کی
قیمتون کا مساوات کی امثال کی رقمون مین بیان ہوسکتا ہی اب ہم اغاز اس مطلب کا نیوٹن صاحب
کی اوس ضابطہ سی کرتی ہین جو مساوات کی قیمتون کی قوای جمع کرنے کے باب مین ہے

(۲۴۴) فرض کرو کہ $لا^ن + ع_۱ لا^{ن-۱} + ع_۲ لا^{ن-۲} + \ldots + ع_ن$ کو ح (لا)

تعبیر کرتا ہی اور ا و ب و س او ر د مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمتوں کو تعبیر کرتے ہین

فرض کرو کہ $\text{ص}_1 = \text{ا} + \text{ب} + \text{س} + \text{د} \dots$

$$\text{ص}_2 = \text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{س}^2 + \text{د}^2 + \dots$$

$$\text{ص}_3 = \text{ا}^3 + \text{ب}^3 + \text{س}^3 + \text{د}^3 + \dots$$

اور علی ہذا القیاس ص_1 مجموعہ قیمتوں کا ہی اور ص_2 مجموعہ قیمتوں کے مجذوروں کا ہے اور ص_3 مجموعہ قیمتوں کی مکعبوں کا ہی غرض بالعموم $\text{ص}_\text{م}$ مجموعہ قیمتوں کے م قوتوں کا ہے

بموجب دفعہ ۴۷ کے

$$\text{ح}'(\text{لا}) = \frac{\text{ح}(\text{لا})}{\text{لا} - \text{ا}} + \frac{\text{ح}(\text{لا})}{\text{لا} - \text{ب}} + \frac{\text{ح}(\text{لا})}{\text{لا} - \text{س}} + \dots$$

اس متطابقہ کی بائین طرف جو تقسیمین لکھی ہین وہ بموجب دفعہ ۷ کی ٹھیک ٹھیک ہو سکتی ہین اور ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{ح}(\text{لا})}{\text{لا} - \text{ا}} = \text{لا}^{\text{ن}-1} + (\text{ا} + \text{ع}_1)\,\text{لا}^{\text{ن}-2} + (\text{ا}^2 + \text{ع}_1\text{ا} + \text{ع}_2)\,\text{لا}^{\text{ن}-3} + \dots$$
$$+ (\text{ا}^\text{م} + \text{ع}_1\text{ا}^{\text{م}-1} + \text{ع}_2\text{ا}^{\text{م}-2} \dots)\,\text{لا}^{\text{ن}-\text{م}-1} + \dots$$

اور اسی کی متماثل جملی $\frac{\text{ح}(\text{لا})}{\text{لا} - \text{ب}}$ اور $\frac{\text{ح}(\text{لا})}{\text{لا} - \text{س}}$ ... حاصل ہونگی اور جمع کرنے سے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{ح}'(\text{لا}) = \text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + (\text{ص}_1 + \text{ن}\,\text{ع}_1)\,\text{لا}^{\text{ن}-2} + (\text{ص}_2 + \text{ع}_1\text{ص}_1 + \text{ن}\,\text{ع}_2)\,\text{لا}^{\text{ن}-3}$$
$$+ (\text{ص}_\text{م} + \text{ع}_1\text{ص}_{\text{م}-1} + \text{ع}_2\text{ص}_{\text{م}-2} + \dots + \text{ن}\,\text{ع}_\text{م})\,\text{لا}^{\text{ن}-\text{م}-1}$$

اور نیز $\text{ح}'(\text{لا}) = \text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + (\text{ن}-1)\,\text{ع}_1\,\text{لا}^{\text{ن}-2} + (\text{ن}-2)\,\text{ع}_2\,\text{لا}^{\text{ن}-3} + \dots$
$$+ (\text{ن}-\text{م})\,\text{ع}_\text{م}\,\text{لا}^{\text{ن}-\text{م}-1} + \dots$$

∴ متطابقہ مین امثال لا کی یکسان قوا کے برابر لکھو تو

$$\text{ص}_1 + \text{ن}\,\text{ع}_1 = (\text{ن}-1)\,\text{ع}_1 \quad \text{یا} \quad \text{ص}_1 + \text{ع}_1 = 0$$

$$\text{ص}_2 + \text{ع}_1\text{ص}_1 + \text{ن}\,\text{ع}_2 = (\text{ن}-2)\,\text{ع}_2 \quad \text{یا} \quad \text{ص}_2 + \text{ع}_1\text{ص}_1 + 2\text{ع}_2 = 0$$

اور علی العموم

$$\text{ص}_\text{م} + \text{ع}_1\text{ص}_{\text{م}-1} + \text{ع}_2\text{ص}_{\text{م}-2} + \dots + \text{ن}\,\text{ع}_\text{م} = (\text{ن}-\text{م})\,\text{ع}_\text{م}$$

یعنی ص م + ع۱ ص م-۱ + ع۲ ص م-۲ + ... + ع م-۱ ص۱ + م ع م = ۰
اس نتیجہ عامہ مین م بہ نسبت ن کے چھوٹا فرض کیا گیا ہے
اس نتیجہ عامہ کی وساطت سی ہم مجموعہ قیمتون کی م وین قوت کا امثال اور قیمتون کے ادنی درجہ کے قوتون کی رقمون مین بیان کرسکتی ہین اور اسی عمل کو مکرر سہ کرر کرنی سی ہم قیمتون کی م وین قوتون کے مجموعہ کو امثال کی رقمون مین بیان کرسکتی ہین

اب فرض کرو کہ م کی ساتھہ ن سی چھوٹی ہونی کی قید جاتی رہی مساوات معلوم ح (لا) = ۰ کی لا م-ن مین ضرب دو تو لا م-ن ح (لا) = ۰ یعنی

لا م + ع۱ لا م-۱ + ع۲ لا م-۲ + ... + ع ن لا م-ن = ۰

کی جگہ متواتر قیمتین ا و ب و س ... رکھو اور ما حصل کو جمع کرو تو اسطرح

ص م + ع۱ ص م-۱ + ع۲ ص م-۲ + ... + ع ن ص م-ن = ۰

اس مسئلہ سی ہم مساوات کی قیمتون کی م وین قوتون کی مجموعہ کو امثال مساوات اور قیمتون کی ادنی قوتون کی رقمون مین اوس حالت مین کہ م چھوٹا ن سی ہو بیان کرسکتی ہین اور اسی عمل کو مکرر سہ کرر کرنی سی مساوات کی قیمتون کی م قوتون کو جمع کرسکتے ہین

(۲۴۵) مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمتون کی منفی قوتون کی مجموعہ کو دریافت کرو

لا کی جگہ ۱/ی رکھو اور اس بدلی ہوئی مساوات مین قیمتون کی مثبت قوتون کے مجموعہ کو معلوم کرو یا دفعہ گذشتہ کی اخر نتیجہ مین م کو متواتر برابر ن-۱ اور ن-۲ اور ن-۳ ... کے بناؤ تو اوسی متواتر ص-۱ و ص-۲ و ص-۳ ... حاصل ہونگے

(۲۴۶) جملہ بالقرینہ ناطقہ کی قیمت دریافت کرنی کی سوال عامہ کی صورت اس سوال کی صورت مین متبدل ہو جائیگی کہ خاص مفرد جملون کی قیمت دریافت کرو اور اب ہم اس کو ثابت کردینگی

کوئی جملہ بالقرینہ ناطقہ اگر صحیح نہ ہو تو وہ خارج قسمت ہوگا جو ایک جملہ بالقرینہ ناطقہ صحیحہ کو دوسرے جملہ بالقرینہ ناطقہ صحیحہ پر تقسیم کرنی سی پیدا ہوا ہو کوئی سا جملہ بالقرینہ ناطقہ صحیحہ اگر متجانس

نہ ہو تو وہ دو یا زیادہ جملے بالقرینہ ناطقہ صحیحہ کا مجموعہ ہوگا پس اسی معلوم ہوا کہ فقط بحث
متجانسہ جملون ہی پر چاہئی ایک جملہ متجانسہ مرکب مختلف اجزا سی ہو سکتا ہی جسمین گو مجموعہ قوت نماؤن کا
ایک ہی رہی مگر وہ خود قوت نما مختلف ہون ایسی صورت مین جملہ متجانسہ مجموعہ دو یا زیادہ اون
متجانسہ جملون کا ہی جو متحد الدرجہ ہین اور اون مین سب رقمون مین ایک ہی قوت نما ہے
اسی معلوم ہوا کہ فقط اون ہی جملون بالقرینہ ناطقہ متجانسہ پر کرنی چاہئی جنمین تمام رقمون مین
قوت نما ایک ہی ہین

(۲۴۷) فرض کرو کہ ا و ب و س اور د . . . مساوات معلوم کی قیمتون کو تعبیر کرتے ہین
بموجب دفعہ ۲۴۴ کے ہم امثال کے رقمون مین قیمت

ا م + ب ا + س ا + د م . . .

کی قیمت بیان کر سکتی ہین اس جملہ کو اول رتبہ کا جملہ کہتی ہین کیونکہ اوسکی ہر ایک رقم مین ایک قیمت مساوات کی
قیمتون مین سے ہے

جب جملہ کی ہر رقم مین قیمتون مین سی دو دو ملتف ہون تو اوسکو دوسرے رتبہ کا جملہ کہتے ہین جیسی یہہ جملہ

طا م ص ع + طا م س ع + ص م س ع + . . .

اب یہان ترتیب قیمتون مین سی دو دو کی لی گئی ہی اور قوت تمام اول قیمت پر اور
ع قوت نما دوسری قیمت پر رکہا گیا ہی اب اس جملہ کو ہم ح ا م ع سے تعبیر کرینگے
کیونکہ وہ حاصل جمع ہے ایسی رقمون کا جیسی کہ رقم ا م ع ہی جب قیمتون مین سی تین تین قیمتین
جدا مین ملتف ہون تو اوس جملہ کو تیسری رتبہ کا جملہ کہتی ہین جیسی کہ یہہ جملہ ہے

ا م ع س ن + ا م ع د ق + ا م ب ع د ق + . . .

یہان ترتیب قیمتون مین سی تین تین کی ایک دفعہ لی گئی ہی اور م اول قیمت پر اور ع دوسرے قیمت پر
اور ق تیسرے قیمت پر رکہا گیا ہی ہم اس جملہ کو ح ا م ب ع ق سی تعبیر کرینگی کیونکہ وہ حاصل جمع
ایسی رقمون کا ہے جیسی کہ ا م ب ع س ق کا ہے

اور اسیطرح سی چوتھی اور زیادہ رتبی کی جملی ہم مقرر کر سکتی ہین اور اسی طریقہ سی اونکی ثابت کر سکتی ہین چونکہ ہم نی یہہ بتلا دیا ہی کہ ص م سی کسطرح جملہ کو بشکل مساوات کی رقموں مین بیان کر سکتی ہین تو صرف یہہ بتلا دینا کافی ہوگا کہ ہم جن جملوں پر بحث کر رہی ہین اونمین سی کوئی ایسی جملوں کی رقموں مین جیسی ص م ہی کسطرح بیان ہو سکتا ہے

(۲۴۸) دوسرے رتبہ کی $\text{ح}\,\text{ا}^{\text{م}}\text{ب}^{\text{ع}}$ جملہ بالقرینہ کی قیمت دریافت کرو

ہم کو معلوم ہی کہ $\text{ص}_{\text{م}} = \text{ا}^{\text{م}} + \text{ب}^{\text{م}} + \text{س}^{\text{م}} + \dots$

$$\text{ص}_{\text{ع}} = \text{ا}^{\text{ع}} + \text{ب}^{\text{ع}} + \text{س}^{\text{ع}} + \dots$$

ضرب دینی سی ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{ص}_{\text{م}}\text{ص}_{\text{ع}} = \text{ا}^{\text{م}+\text{ع}} + \text{ب}^{\text{م}+\text{ع}} + \text{س}^{\text{م}+\text{ع}} + \dots$$
$$+ \text{ا}^{\text{م}}\text{ب}^{\text{ع}} + \text{ا}^{\text{م}}\text{س}^{\text{ع}} + \text{ب}^{\text{م}}\text{ا}^{\text{ع}} + \dots$$

یعنی $\text{ص}_{\text{م}}\text{ص}_{\text{ع}} = \text{ص}_{\text{م}+\text{ع}} + \text{ح}\,\text{ا}^{\text{م}}\text{ب}^{\text{ع}}$

اسیواسطی $\text{ح}\,\text{ا}^{\text{م}}\text{ب}^{\text{ع}} = \text{ص}_{\text{م}}\text{ص}_{\text{ع}} - \text{ص}_{\text{م}+\text{ع}}$

اسمین م اور ن غیر مساوی فرض کئی گئی ہین اگر ہم ع کو برابر م کے فرض کرین تو $\text{ح}\,\text{ا}^{\text{م}}\text{ب}^{\text{ع}}$ مین دو دو رقمین برابر ہو جائینگی اور یہہ حاصل جمع اسطرح بیان کیا جائیگا کہ

$\text{۲}\,\text{ح}\,(\text{ا}\,\text{ب})^{\text{م}}$ اور اسیواسطی

$$\text{۲}\,\text{ح}\,(\text{ا}\,\text{ب})^{\text{م}} = \text{ص}^{\text{۲}}_{\text{م}} - \text{ص}_{\text{۲م}}$$

(۲۴۹) تیسری رتبہ کی جملہ بالقرینہ $\text{ح}\,\text{ا}^{\text{م}}\text{ب}^{\text{ع}}\text{س}^{\text{ق}}$ کی قیمت دریافت کرو

ہم کو معلوم ہی کہ $\text{ح}\,\text{ا}^{\text{م}}\text{ب}^{\text{ع}} = \text{ا}^{\text{م}}\text{ب}^{\text{ع}} + \text{ب}^{\text{م}}\text{س}^{\text{ع}} + \text{ا}^{\text{م}}\text{س}^{\text{ع}} + \dots$

$$\text{ص}_{\text{ق}} = \text{ا}^{\text{ق}} + \text{ب}^{\text{ق}} + \text{س}^{\text{ق}}$$

ضرب دینی سی یہہ ہم کو حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{ص}_{\text{ق}}\,\text{ح}\,\text{ا}^{\text{م}}\text{ب}^{\text{ع}} = \text{ا}^{\text{م}+\text{ق}}\text{ب}^{\text{ع}} + \text{ب}^{\text{م}+\text{ق}}\text{س}^{\text{ع}} + \text{س}^{\text{م}+\text{ق}}\text{ا}^{\text{ع}} + \dots$$

+ ا م ب ع + ق + ح س ع + ق + س ا ع + ق

+ ا ا ع س ق + . .

اب یہان بائین طرف کی ارقام مین تین صنف ہین جو موافق ہماری طریقہ کتابت کی اسطرح تعبیر ہوتے ہین

ح ا م + ق ب ع و ح ا ع + ق ب م د ح ا م ب ع س ق پس

ص ی ح ا م ب ع = ح ا م + ق ب ع + ح ا ع + ق ب م + ح ا م ب ع س ق

دفعہ ۲۴۸ کی موافق جو قیمتین ح ا م ب ع اور ح ا م + ق ب ع اور ح ا ع + ق ب م کی دریافت ہون اونکو ان کی جگہ رکہو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

ح ا م ب ع س ق = ص م ص ع ص ق − ص م + ع ص ق − ص م + ق ص ع − ص ع + ق ص م + ۲ ص م + ع + ق

ہم نی م اور ع اور ق کو غیر مساوی فرض کیا ہی لیکن فرض کرو کہ م = ع تو بموجب دفعہ ۲۴۸ کی ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے

۲ ح (ا ب)م س ق = ص م ص م ص ق − ص ۲ م ص ق − ۲ ص م + ق ص م + ۲ ص ۲ م + ق

اگر م = ع = ق تو مجموعہ ح ا م ب ع س ق کا متبدل اور مختصر ہو کر ۲ . ۳ ح (ا ب س)م ہوگا پس

۶ ح (ا ب س)م = ص م ص م ص م − ۳ ص ۲ م ص م + ۲ ص ۳ م

اس دفعہ اور دفعہ گذشتہ کی ترکیب جہانتک چاہین جاری رکہین اور اوس سی ہم کو ہر رتبہ کا جملہ جو ح ا م ب ع اور ح ا م ب ع س ق صورت کا ہو امثال کی رقمون مین بیان ہو جائیگا

پس بموجب دفعہ ۲۴۶ کے جو اس باب کا مطلب ہی وہ حاصل ہو جائیگا

(۲۵۰) ہم نی یہہ بتلا دیا ہی کہ ہر جملہ ص م سی تعبیر ہو وہ امثال کی رقمون مین کسطرح بیان ہو سکتا ہی اس سلئے اسطرح کتنے جملے مثل ص م کی ہون اونکا مجموعہ حاصل ہو سکتا ہی مگر ترکیب ذیل سی اکثر زیادہ فائدہ حاصل ہوتا ہے

اگر مح (لا) کسی لا کی جملہ ناطقہ صحیحہ کو تعبیر کری اور مطلوب یہہ ہو کہ حاصل جمع مح (ا) + مح (ب) + مح (س) + دریافت کرین تو ہم کو یہہ معلوم ہے کہ

$$\frac{ح'(لا)}{ح\,(لا)} = \frac{1}{لا-ا} + \frac{1}{لا-ب} + \frac{1}{لا-س} + \ldots$$

اسواسطی

$$\frac{مح(لا)\,ح'(لا)}{ح\,(لا)} = \frac{مح\,(لا)}{لا-ا} + \frac{مح\,(لا)}{لا-ب} + \frac{مح\,(لا)}{لا-س} + \ldots$$

$$= \frac{م ح(لا) - م ح(ا)}{لا - ا} + \frac{م ح(لا) - م ح(ب)}{لا - ب} + \frac{م ح(لا) - م ح(س)}{لا - س} + \cdots$$

$$+ \frac{م ح(ا)}{لا - ا} + \frac{م ح(ب)}{لا - ب} + \frac{م ح(س)}{لا - س} + \cdots$$

اس متطابقہ مین اجزاء صحیحہ اور اجزاء مکسورہ جدا جدا باہمین برابر ہونگے اور اسی جملی ہیانیہ جیسی کہ $\frac{م ح(لا) - م ح(ا)}{لا - ا}$ ہی بموجب دفعہ ۷ کے صحیح ہونگے فرض کرو کہ م ح (لا) حَ (لا) کو ح (لا) پر تقسیم کرین اور عمل کئی جائین جب تک کہ باقی ایک جملہ صحیحہ لا کا ادنے درجہ کا بہ نسبت ح (لا) کی حاصل ہو اور ر باقی ہو تو متطابقہ کے اجزاء مکسورہ سے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{ر}{ح(لا)} = \frac{م ح(ا)}{لا - ا} + \frac{م ح(ب)}{لا - ب} + \frac{م ح(س)}{لا - س} + \cdots$$

کو ضرب دو تو

$$ر = لا^{ن-۱} \left[م ح(ا) + م ح(ب) + م ح(س) + \cdots \right]$$

+ ارقام ضمین بہ نسبت $لا^{ن-۱}$ کے ادنے قوتین ملتفہین

پس م ح (ا) + م ح (ب) + م ح (س) + ... باقی ر مین $لا^{ن-۱}$ کے امثال کی برابر ہے

(۲۵۱) اس باب کی صور قانونیہ کی ایک مثال لکھتے ہین فرض کرو کہ مساوات $لا^۴ - لا^۳ - ۷ لا^۲ + لا + ۶ = ۰$ کی قیمتون کی قوتون کا حاصل جمع دریافت کرنا ہے

$ص_۱ = - ع_۱ = ۱$

$ص_۲ = - ع_۱ ص_۱ - ۲ ع_۲ = ۱ + ۱۴ = ۱۵$

$ص_۳ = - ع_۱ ص_۲ - ع_۲ ص_۱ - ۳ ع_۳ = ۱۵ + ۷ - ۳ = ۱۹$

$ص_۴ = - ع_۱ ص_۳ - ع_۲ ص_۲ - ع_۳ ص_۱ - ۴ ع_۴ = ۱۹ + ۱۰۵ - ۱ - ۲۴ = ۹۹$

$ص_۵ = - ع_۱ ص_۴ - ع_۲ ص_۳ - ع_۳ ص_۲ - ع_۴ ص_۱ = ۹۹ + ۱۳۳ - ۱۵ - ۶ = ۲۱۱$

$ص_۶ = - ع_۱ ص_۵ - ع_۲ ص_۴ - ع_۳ ص_۳ - ع_۴ ص_۲ = ۲۱۱ + ۶۹۳ - ۱۹ - ۹۰ = ۷۹۵$

اور علیٰ ہذا القیاس

$\frac{1}{ن}$ کو بجای لا کے مساوات معلوم مین رکھو تو

ن^{4} + $\frac{1}{6}$ ن^{3} - $\frac{7}{6}$ ن^{2} - $\frac{1}{6}$ ن + $\frac{1}{6}$ = ۰

پس اصل مساوات کی قیمتوں کی منفی قوتوں کی جمع کرنی کی واسطی ہم کو یہہ معلوم ہی کہ

ص$_{-1}$ = $-\frac{1}{6}$

ص$_{-2}$ = $-\frac{1}{6}$ ص$_{-1}$ - ۲ $(-\frac{7}{6})$ = $\frac{14}{6}$ + $\frac{1}{36}$ = $\frac{85}{36}$

ان نتایج کا اثبات آسانی سی ہو سکتا ہی کیونکہ اصل مساوات ایسی بنائی گئی ہی کہ اوسکی قیمتین

-۲ و -۱ اور ۳ ہین

اب پہر فرض کرو کہ ہم کو اس چوتھی درجہ کی مساوات لا^{4} + ع لا^{3} + ق لا^{2} + ر لا + ث = ۰

کی قیمتین ص$_{1}$ و ص$_{2}$ و ص$_{3}$ و ص$_{4}$ کی دریافت کرنی ہین

ص$_{1}$ + ع = ۰ اسیواسطی ص$_{1}$ = -ع

ص$_{2}$ + ع ص$_{1}$ + ۲ق = ۰ اسیواسطی ص$_{2}$ = ع^{2} - ۲ق

ص$_{3}$ + ع ص$_{2}$ + ق ص$_{1}$ + ۳ر = ۰ اسیواسطے ص$_{3}$ = -ع (ع^{2} - ۲ق) + ع ق - ۳ر

= -ع^{3} + ۳ع ق - ۳ر

ص$_{4}$ + ع ص$_{3}$ + ق ص$_{2}$ + ر ص$_{1}$ + ۴ث = ۰

اسیواسطے ص$_{4}$ = -ع (-ع^{3} + ۳ع ق - ۳ر) - ق (ع^{2} - ۲ق) + ر ع - ۴ث

= ع^{4} - ۴ع^{2} ق + ۴ر ع + ۲ق^{2} - ۴ث

ایک اور مثال مساوات درجہ چہارم کی لو فرض کرو کہ مساوات درجہ چہارم کی لا^{4} + ع لا^{3} + ق لا^{2} + ر لا + ث = ۰

کی قیمتین سہ و صہ و لر و فر ہین

فرض کرو کہ ا = $\frac{1}{2}$ (سہ صہ + لر فر) و ب = $\frac{1}{2}$ (سہ لر + صہ فر) و س = $\frac{1}{2}$ (سہ فر + صہ لر)

اور ہم کو اس مساوات درجہ چہارم کی قیمتوں کی ان بالقرینہ جملوں کی قیمت دریافت کرنی ہو

(۱) ا + ب + س

(۲) ا ب + ب س + س ا

(۳) ا ب س

(۱) ا + ب + س = ½ (سه صه + سه لر + صه فر + صه لر + صه فر + لر فر) = ق/۲

(۲) ا ب + ب س + س ا = ¼ (سه² صه لر + سه² لر فر + ۰۰۰) = ¼ ح سه² صه لر

= ⅛ (ص۱² ص۲ ص۳² − ۲ ص۱ ص۲ ص۳ + ۲ ص۴) بموجب دفعہ ۲۴۹ کے

پس قیمتیں ص۱ و ص۲ و ص۳ و ص۴ کی جو اِسی حاصل ہوئی ہیں اونکی جگہ مندرج کرو تو قیمت ¼ ح سه² صه لر کی دریافت ہوگی یا ہم اسطرح عمل کریں کہ

ح سه² صه لر = ح سه² سه لر فر / فر = سه صه لر فر ح سه/فر

اور سه صه لر فر = ث اور ح سه/فر = ع ر/ث − ۴ بموجب دفعہ ۴۸ کے

اسیواسطے ا ب + ب س + س ا = ¼ (ع ر − ۴ ث)

(۳) ا ب س = ⅛ (سه³ صه لر فر + ۰۰۰ + سه² صه² لر² + ۰۰۰) =

⅛ ح سه³ صه لر فر + ⅛ ح سه² صه² لر²

اس باب کی ترکیبوں سے ان دو بالقرینہ جملوں کے قیمت دریافت ہو سکتی ہی اور اون ترکیبوں کا ہم اختصار اسطرح کرتی ہیں کہ

ح سه³ صه لر فر = سه صه لر فر ح سه² = ث (ع² − ۲ ق)

ح سه² صه² لر² = سه² صه² لر² فر² ح 1/سه² = ث² (ر²/ث² − ۲ق/ث)

اسواسطے کہ ح (1/سه²) دریافت کرنی کی واسطے اوس مساوات کے قیمتوں کے مجذوروں کا حاصل جمع دریافت کریں جسمیں لا کی جگہ 1/لا لکھا جاے

پس ا ب س = ⅛ (ر² + ع² ث − ۴ ق ث)

قیمتیں جملوں ا و ب و س کی جو دریافت ہوئی ہیں اونکی صحت ثابت بہی ہو سکتی ہی اسلئے کہ وہ بموجب دفعہ ۱۸۹ کے قیمتیں م کی مکعبی مساوات کی بموجب دفعہ ۱۸۸ کے ہیں

بیسواں باب استعمال بالقرینہ جملوں کا

(۲۵۲) مساوات کی قیمتون کی بالقرینہ جملون کے مسئلہ کو ہم دو جگہ کام مین لاوینگی اول ایسی مساوات کی بنانی مین جسکی قیمتین مساوات مفروضہ کی قیمتون کی تفاوت کے مجذور ہون اور دوم ایک بڑا مسئلہ مساوات مین سی مجہول کی دور کرنے کا اوسی ثابت کرینگے

(۲۵۳) ایسی مساوات بناؤ کہ جسکی قیمتین مساوات مفروضہ کی قیمتون کے تفاوت کا مجذور ہون

فرض کرو کہ مساوات مفروضہ ان درجہ کی ہی اور اوسکی قیمتین ا و ب و س ... ہین تو مساوات مطلوبہ کی قیمتین $(ا - ب)^۲$ و $(ا - س)^۲$ ... $(ب - س)^۲$ ... ہونگین اور ان کی تعداد برابر اوس اجتماع کی ہوگی جو ان چیزون مین سی دو دو کا لیا جاے یعنی $\frac{۱}{۲} ن (ن - ۱)$ اسیواسطے یہہ عدد مساوات مطلوبہ کی درجے کو تعبیر کریگا ... $\frac{۱}{۲} ن (ن - ۱)$ کی جگہ م رکہو اور فرض کرو کہ مساوات مطلوبہ

$$لا^{م} + ق_{۱} لا^{م-۱} + ق_{۲} لا^{م-۲} + \dots + ق_{م} = ۰$$

سے تعبیر ہوتی ہی اور $ص_{ر}$ اوسکی قیمتون کی ر وین قوتون کا مجموعہ ہی پس ہم کو $ص_{۱}$ و $ص_{۲}$ ... $ص_{م}$ کا صرف تحقیق کرنا ہی اور بعد اس تحقیق کرنی کی امثال مساوات مطلوبہ کے بموجب دفعہ ۲۴۴ کے ان صورۃ قانونیہ سی متواتر دریافت ہو جائینگی کہ $ص_{۱} + ق_{۱} = ۰$ و $ص_{۲} + ق_{۱} ص_{۱} + ۲ق_{۲} = ۰$ اور علی ہذا القیاس

فرض کرو کہ $ح (لا) = (لا - ا)^{۲ر} + (لا - ب)^{۲ر} + (لا - س)^{۲ر} + \dots$

پس $۲ ص_{ر} = ح (ا) + ح (ب) + ح (س) + \dots$

اب فرض کرو کہ $ص_{۱}$ و $ص_{۲}$ و $ص_{۳}$ ... مساوات مفروضہ کی قیمتون کے قوتون کے مجموعون کو تعبیر کرتی ہین تو

$$ح (لا) = ن لا^{۲ر} - ۲ر ص_{۱} لا^{۲ر-۱} + \frac{۲ر (۲ر - ۱)}{۱ \times ۲} ص_{۲} لا^{۲ر-۲} - \dots + ص_{۲ر}$$

لا کی جگہ متواتر ا و ب و س ... رکہو اور جمع کرو تو

$$۲ ص_{ر} = ن ص_{۲ر} - ۲ر ص_{۱} ص_{۲ر-۱} + \frac{۲ر (۲ر - ۱)}{۱ \times ۲} ص_{۲} ص_{۲ر-۲} - + \dots ن ص_{۲ر}$$

بائین طرف جو ارقام لکہی ہین اونمین اول اور آخر سی ارقام متساوی البعد آپسمین برابر ہین اسیواسطے

اونکی ترتیب ثانی سی اور ۲ پر تقسیم کرنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{ص}'_{\text{ر}} = \text{ق ص}_{۲\text{ر}} - ۲\text{ر ص}_۱ \text{ص}_{۲\text{ر}-۱} + \frac{۲\text{ر}(۲\text{ر}-۱)}{۱\times۲}\text{ص}_۲ \text{ص}_{۲\text{ر}-۲} - \cdots$$
$$+ \frac{۱}{۲}(-۱)^{\text{ر}} \frac{۲\text{ر}(۲\text{ر}-۱)\cdots(\text{ر}+۱)}{|\text{ر}} \text{ص}_{\text{ر}}^۲$$

اب ص۱ اور ص۲ . . . مساوات مفروضہ کی امثال کی قیمتون مین بیان ہوسکتی ہین پس ص'ر معلوم ہوسکتا ہے اور پہر اوسی اخر کار مساوات مطلوبہ کی امثال دریافت ہوجا ئینگے

(۲۵۴) مساوات مطلوبہ کی اخر رقم جو ق م سی تعبیر کی گئی ہی اوسکا حساب ایک اور طریقہ سی بہی ہوسکتا ہی

فرض کرو کہ مساوات مفروضہ ح (لا) = ۰ پس

$$\text{ح (لا)} = (\text{لا} - \text{ا})(\text{لا} - \text{ب})(\text{لا} - \text{س}) \cdots$$

$$\text{پس ح}'\text{(لا)} = (\text{لا} - \text{ب})(\text{لا} - \text{س}) \cdots + (\text{لا} - \text{ا})(\text{لا} - \text{س}) \cdots + \cdots$$

$$\text{ح}'\text{(ا)} = (\text{ا} - \text{ب})(\text{ا} - \text{س}) \cdots$$

$$\text{ح}'\text{(ب)} = (\text{ب} - \text{ا})(\text{ب} - \text{س}) \cdots$$

اسی معلوم ہوا کہ $\text{ق م} = \text{ح}'\text{(ا)}\,\text{ح}'\text{(ب)}\,\text{ح}'\text{(س)} \cdots$

اب فرض کرو کہ سہ و صہ و لہ . . . قیمتین مساوات ح' (لا) = ۰ کی ہوں تو

$$\text{ح}'\text{(لا)} = \text{ن}(\text{لا} - \text{سہ})(\text{لا} - \text{صہ})(\text{لا} - \text{لہ}) \cdots$$

اسیواسطی $\text{ح}'\text{(ا) ح}'\text{(ب) ح}'\text{(س)} \cdots$

$$= \text{ن}^{\text{ن}} (\text{ا} - \text{سہ})(\text{ا} - \text{صہ})(\text{ا} - \text{لہ}) \cdots (\text{ب} - \text{سہ})(\text{ب} - \text{صہ}) \cdots (\text{س} - \text{سہ}) \cdots$$

لیکن $(\text{ا} - \text{سہ})(\text{ب} - \text{سہ})(\text{س} - \text{سہ}) \cdots = (-۱)^{\text{ن}} \text{ح (سہ)}$

$$(\text{ا} - \text{صہ})(\text{ب} - \text{صہ})(\text{س} - \text{صہ}) \cdots = (-۱)^{\text{ن}} \text{ح (صہ)}$$

اور علی ہذا القیاس

$$\text{پس ح}'\text{(ا) ح}'\text{(ب) ح}'\text{(س)} = \text{ن}^{\text{ن}} (-۱)^{\text{ن}(\text{ن}-۱)} \text{ح (سہ) ح (صہ) ح (لہ)} \cdots$$
$$= \text{ن}^{\text{ن}} \text{ح (سہ) ح (صہ) ح (لہ)} \cdots$$

اسواسطی $(-1)^{ن(ن-1)} = 1$

ابوح (س) ح (ص) ح (لر) ... مساوات مشتقہ ح (لا) = ۰ کی قیمتون کا جملہ بالقرینہ ہی اور اسیواسطی اوسکا حاب ہوسکتا ہے

(۲۵۵) ایک فایدہ ایسی مساوات کی دریافت کرنی کا کہ جسکی قیمتین مساوات مفروضہ کی قیمتون کے تفاوت کا مجذور ہون دفعہ ۱۰۹ مین ہم نی بیان کیا ہی کہ اوسی مساوات مفروضہ کی قیمتون کا مقام معلوم ہوتا ہی مگر یہہ مطلب تو سٹرم صاحب کی ضابطہ سی خوب حاصل ہوتا ہی ایک اور بات اسی مساوات سی کہ جسکی قیمتین مساوات مفروضہ کی قیمتون کے تفاوت کا مجذور ہون حاصل ہوتی ہی کہ اوسکی قیمتون کی دیکھنی سی مساوات مفروضہ کی خیالی قیمتون کی تعداد معلوم ہوجاتی ہی اسواسطے کہ یہہ امر ظاہر ہی کہ اس جدید مساوات کی منفی قیمتین ہون تو مساوات مفروضہ کی خیالی قیمتین ہونگین اور اگر مساوات جدید کی منفی قیمتین نہ ہون تو مساوات مفروضہ کی خیالی قیمتین نہونگین اگر مساوات جدید کی خیالی قیمتین ہون تو مساوات مفروضہ کی بہی خیالی قیمتین ہونگین اور اگر اوسکی کوئی خیالی قیمت نہ ہو تو مساوات مفروضہ کی بہی کوئی خیالی قیمت نہ ہوگی

مثلاً مساوات مفروضہ درجہ چہارم کی یہہ قیمتین $\pm$ لر $\sqrt{-1}$ اور $\pm$ لو $\sqrt{-1}$ ہون تو اس صورت مین مساوات جدید کی حقیقی منفی قیمتین ہونگین

(۲۵۶) اگر دو مساواتون مین دو مقادیر مجہولہ ہون تو اب ہم یہہ بتلاوینگی کہ اونمین سے ایک مقدار مجہول قیمتون کی بالقرینہ جملون سی کسطرح دور کرتے ہین

فرض کرو کہ مساواتین یہہ ہون کہ

$$ع_۰ لا^م + ع_۱ لا^{م-۱} + ع_۲ لا^{م-۲} + ... + ع_م = ۰$$

$$ق_۰ لا^ن + ق_۱ لا^{ن-۱} + ق_۲ لا^{ن-۲} + ... + ق_ن = ۰$$

امثال ع۰ و ع۱ و ع۲ ... ق۰ و ق۱ و ق۲ ... مقدار د کے جملے ناطقہ صحیحہ ہین اور لا کا دور کرنا منظور ہے

فرض کرو کہ ان مساواتون مین سی اول مساوات سی لا کی قیمتین ارقام ا مین دریافت ہوئی ہین اور ا و ب و س ۰۰۰ ان کو تعبیر کرتی ہین ان کو دوسری مساوات مین مندرج کرو تو ہم کو م مساواتین ر کے تحقیق کرنے کے واسطی حاصل ہونگین یعنی

$$ق_۰ ا^ن + ق_۱ ا^{ن-۱} + ق_۲ ا^{ن-۲} + \cdots + ق_ن = ۰$$

$$ق_۰ ب^ن + ق_۱ ب^{ن-۱} + ق_۲ ب^{ن-۲} + \cdots + ق_ن = ۰$$

$$ق_۰ س^ن + ق_۱ س^{ن-۱} + ق_۲ س^{ن-۲} + \cdots + ق_ن = ۰$$

پس تمام قیمتین ر کی جو قابل داخل ہونی کی ہین وہ ان مساواتون کی قیمتون مین شامل ہین اور بالعکس اکی جو کوئی قیمت ان مساواتون کی ہو وہ ر کی قیمت قابل داخل ہونی کے ہے اسواسطی کہ تمثیلاً فرض کرو کہ مساوات اول کی ایک قیمت صہ ہی اور جب امین بجای ر کی صہ کہا جاے تو اکی قیمت سہ ہوتی ہی پس لا = سہ اور ر = صہ دو اصل مساواتون کی شرائط کو پورا کرینگے اسواسطی کہ یہہ قیمتین بظاہر دوسرے مساوات کی شرائط کو پورا کرتی ہین اور مساوات اول کی شرائط لا = ا سی پوری ہوتی ہین خواہ ر کچھہ ہی ہو پس اسلئی جب ہم لا = ا اور امین ر کو صہ مقرر کرین تو بہی اول مساوات کی شرائط پوری ہونگین اسی یہہ استخراج ہوتا ہے کہ اگر اوپر کی مساواتون کی داہنی طرف کی ارکان کو باہم ضرب دین اور حاصل ضرب کو برابر صفر کے لکھہ دین تو ایک مساوات اخرکار ر کی حاصل ہو جائیگی

مقادیر ا اور ب و س ۰۰۰ مین سی دو دو کے باہم تبادل سی یہہ حاصل ضرب متبدل نہین ہوگا اسلئی ان مقادیر کا وہ جملہ بالقرینہ ہوگا اور اسلئی اوسکی قیمت مساوات اول کو مثال ع۰ و ع۱ و ع۲ ۰۰۰ کی رقمون مین بیان ہو سکتی ہی پس اسطرح اخر کو ایک مساوات ناطقہ صحیحہ ر کی حاصل ہو جائیگی اور اوسمین وہی سب قیمتین ر کی ہونگین جو داخل ہونے کی قابلیت رکھتی ہین اور اونکی سوا کوئی اور قیمت نہین ہوگی

(۲۵۷) ایک خاص مثال فرض کرو کہ ایک مساوات مکعبی ہی اور دوسرے مساوات درجہ دوم کی ہے

اور ہم کو لا کا دور کرنا مساواتون سے منظور ہے

ع. لا^{3} + ع$_{1}$ لا^{2} + ع$_{2}$ لا + ع$_{3}$ = ۰ ق. لا^{2} + ق$_{1}$ لا + ق$_{2}$ = ۰

اسمین امثال ع کی حملی فرض کیگئی ہین اب بموجب دفعہ گذشتہ کی طریقہ کتابت کی ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے

(ق. ا^{2} + ق$_{1}$ ا + ق$_{2}$) (ق. ب^{2} + ق$_{1}$ ب + ق$_{2}$) (ق. س^{2} + ق$_{1}$ س + ق$_{2}$) = بعینہ

ق$_{2}^{3}$ + ق.^{3} ا^{2}ب^{2}س^{2} + ق.^{2} ق$_{2}$ حـ ا^{2}ب^{2} + ق. ق$_{2}^{2}$ حـ ا^{2} + ق.^{2} ق$_{1}$ حـ ا^{2}ب^{2}س + ق. ق$_{1}$ ق$_{2}$ حـ ا^{2}ب

+ ق$_{1}$ ق$_{2}^{2}$ حـ ا + ق. ق$_{1}^{2}$ ق$_{2}$ حـ ا^{2} + ق. ق$_{1}^{2}$ حـ ا^{2}ب س + ق. ق$_{1}$ ق$_{2}$ حـ ا^{2}ب = ۰

اور نیز اب س = − $\frac{ع_3}{ع.}$ اور ا^{2}ب^{2}س^{2} = $\frac{ع_3^2}{ع.^2}$

حـ ا^{2}ب^{2} = ا^{2}ب^{2}س^{2} حـ $\frac{1}{ا^2}$ = $\frac{ع_3^2}{ع.^2}$ $\left(\frac{ع_2^2}{ع_3^2} - \frac{2ع_1}{ع_3}\right)$

حـ ا^{2}ب^{2}س = اب س حـ اب = − $\frac{ع_3}{ع.}$ حـ اب = − $\frac{ع_2 ع_3}{ع.^2}$

حـ ا = − $\frac{ع_1}{ع.}$ حـ ا^{2} = $\frac{ع_1^2}{ع.^2}$ − $\frac{2ع_2}{ع.}$

حـ ا^{2}ب س = اب س حـ ا = $\frac{ع_1 ع_3}{ع.^2}$

حـ ا^{2}ب = اب س حـ $\frac{ا}{ب}$ = − $\frac{ع_3}{ع.}$ $\left(\frac{ع_1 ع_2}{ع. ع_3} - 3\right)$ بموجب دفعہ ۲۴۸ کے

ان قیمتون کی مندرج کرنی سی وہ مساوات حاصل ہوگی جو لا کے دور کرنے سے حاصل ہوتی

(۲۵۸) اگر ایک مساوات م درجہ اور دوسری ن درجہ کی ہو اور اونمین دو مقداریں مجہول ہون اور اونمین سی ایک مقدار مجہول کو دور کرین تو مساوات مستحصلہ م ن درجہ سی زیادہ درجہ کی نہین ہوگی

فرض کرو کہ مساواتین یہہ ہون کہ

ع. لا^{م} + ع$_{1}$ لا$^{م-1}$ + ع$_{2}$ لا$^{م-2}$ + . . . + ع$_{م}$ = ۰

ق. لا^{ن} + ق$_{1}$ لا$^{ن-1}$ + ق$_{2}$ لا$^{ن-2}$ + . . . + ق$_{ن}$ = ۰

ان مساواتون مین امثال حملی ع کی ہین اور علاوہ اسکی یہہ بھی فرض کیا گیا ہی کہ مساوات اول مین لا اور ی کی قوت نمایون کا مجموعہ م سی زیادہ نہین ہی اور مساوات دوم مین ن سی زیادہ نہین ہے

پس ع$_{م}$ اور ق$_{ن}$ م اور ن درجہ کی ی مین ہو سکتی ہین مگر فرسی زیادہ نہین اب فرض کرو کہ دفعہ ۲۵۷ کے

کی ترکیب کی موافق لا دور کیا گیا تو ر کی مساوات اخر کا اول رکن مین ایک سلسلہ ارقام کا ہوگا جسمین سی ہر یک رقم حاصل ضرب م اجزا ضربی کا ہی اور اوسکی صورت ق ر ا ن - × ق ص ب ن - ص + ق ط س ن - ط ہی اور چونکہ ہم یہہ جانتی ہین کہ یہہ سلسلہ ارقام کا جملہ بالقرینہ ا و ب س ... کا ہی تو مجموعہ ارقام مع قوت نمایون کی جنکا ابہی ذکر کیا ہے یہہ ہوگا کہ

ق ر ق ص ق ط ... ح ا ن - ر ب ن - ص س ن - ط

اب درجہ ق ر ق ص ق ط ... کا اعلی ر + ص + ط + ... سی نہین ہی تو اب ہم کو صرف یہہ ثابت کرنا رہا کہ درجہ ح ا ن - ر ب ن - ص س ن - ط ... کا بڑا ن - ر + ن - ص + ن - ط + ... سی نہین تو اسی یہہ استخراج ہوگا کہ حاصل ضرب کا درجہ اعلی م ن سی نہین ہی اب یہہ نتیجہ مطلوب دو مشاہدون سی حاصل ہوتا ہی اول دفعہ ۲۲۴ کے صور قانونیہ سی یہہ ثابت ہوسکتا ہے کہ ص م مین اعلی قوتین ر کی بہ نسبت م ر کی نہین ملتی ہین دوم دفعہ ۲۴۸ اور ۲۴۹ کے عملون سی مستنبط ہوتا ہی کہ قیمت ح ا ر ب م س ر ... مین قوتین اور حاصل ضرب ص ۱ و ص ۲ و ص ۳ ... ص ر + م + س ملتی ہی اور ہر رقم مین فرض کی حروف ماتحت کا مجموعہ ر + م + س + ... ہے

اسی ہم یہہ نتیجہ نکالتی ہین کہ اخر مساوات ر مین کوئی قوت ر کی اعلی م ن سی نہین واقع ہوتی (۲۵۹) دفعہ گذشتہ سی ر کی اخر مساوات کی درجہ کی حد غائی معلوم ہوتی ہی کہ اوسی اگے وہ نہین بڑہتا لیکن وہ بعض صورتون مین اس حد غائی سی چہوٹا ہوتا ہے

مسئلہ کی توسیع ہوسکتی ہی اور یہہ نتیجہ عامہ اوسی مستنبط ہوتا ہی کہ جتنی مساواتین ہون اونمین اوتنی ہی مقادیر مجہول ملتی ہون اور یہہ تمام مقادیر مجہولہ سوا ایک کے دور کیجائین تو اخر جو مساوات حاصل ہوگی اوسکا درجہ اصل مساواتون کی درجون کی حاصل ضرب سی بڑا نہین ہوگا

سمرٹ کا جبر مقابلہ پڑہو

اکیسوان باب قیمتون کی قوتون کے مجموعی

(۲۶۰) نیوٹن صاحب کی ترکیب دفعہ ۲۴۴ مین جو بیان ہوئی ہی اوسی متواتر حاصل جمع مساوات کی قیمتوں کی قوتوں کا دریافت ہو سکتا ہے

اب ہم ایک اور ترکیب بیان کرتے ہین جسکو کچھ لگاؤ اس پہلی ترکیب سے نہیں ہوگا جسمین قیمتون کے قواے صحیحہ مفروضہ کا مجموعہ حاصل ہو جاے

فرض کرو کہ ا ب وس ... مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمتیں ہین تو ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ

$\text{ح}(\text{لا}) = (\text{لا}-\text{ا})(\text{لا}-\text{ب})(\text{لا}-\text{س})\ldots$ اور فرض کرو کہ مساوات ن درجہ کی ہی تو

$$\frac{\text{ح}(\text{لا})}{\text{لا}^{\text{ن}}} = \left(1-\frac{\text{ا}}{\text{لا}}\right)\left(1-\frac{\text{ب}}{\text{لا}}\right)\left(1-\frac{\text{س}}{\text{لا}}\right)\ldots$$

طرفین کی لوکارثم لو اور بائین طرف کی لوکارثم کی صورت مفصلہ لکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{لوگ}\,\frac{\text{ح}(\text{لا})}{\text{لا}^{\text{ن}}} = -\frac{1}{\text{لا}}(\text{ا}+\text{ب}+\text{س}+\ldots)$$
$$-\frac{1}{2\,\text{لا}^2}(\text{ا}^2+\text{ب}^2+\text{س}^2+\ldots)$$
$$-\frac{1}{3\,\text{لا}^3}(\text{ا}^3+\text{ب}^3+\text{س}^3+\ldots)$$

- - - - -

پس بائین طرف امثال $\frac{1}{\text{لا}^{\text{م}}}$ کا $-\frac{\text{ص}_{\text{م}}}{\text{م}}$ ہی اسی معلوم ہوا کہ $\frac{\text{ص}_{\text{م}}}{\text{م}}$ = امثال $\frac{1}{\text{لا}^{\text{م}}}$ کے جو صورت مفصلہ $-$ لوک $\frac{\text{ح}(\text{لا})}{\text{لا}^{\text{ن}}}$ مین ہو اور یہہ صورت مفصلہ قواے متنازلہ لا مین لکھی گئی ہو

اسمین م مثبت فرض کیا گیا ہی اگر قواے منفیہ صحیحہ کا حاصل جمع دریافت کرنا منظور ہو تو لا کو $\frac{1}{\text{لا}}$ سی بدل دو اور مساوات د کی قیمتوں کی مثبت قواے کا مجموعہ اس مساوات مین دریافت کرو

(۲۶۱) تمثیلاً مساوات $\text{لا}^2 - \text{ع}\,\text{لا} + \text{ق} = 0$ کی قیمتوں کی م قوتوں کا مجموعہ دریافت کرو

یہان $\frac{\text{ح}(\text{لا})}{\text{لا}^2} = 1-\left(\frac{\text{ع}}{\text{لا}}-\frac{\text{ق}}{\text{لا}^2}\right)$ و $-\text{لوک}\,\frac{\text{ح}(\text{لا})}{\text{لا}^2} = -\text{لوک}\left[1-\left(\frac{\text{ع}}{\text{لا}}-\frac{\text{ق}}{\text{لا}^2}\right)\right]$

$$= \frac{\text{ع}}{\text{لا}}-\frac{\text{ق}}{\text{لا}^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\text{ع}}{\text{لا}}-\frac{\text{ق}}{\text{لا}^2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{\text{ع}}{\text{لا}}-\frac{\text{ق}}{\text{لا}^2}\right)^3+\ldots+\frac{1}{\text{م}}\left(\frac{\text{ع}}{\text{لا}}-\frac{\text{ق}}{\text{لا}^2}\right)^{\text{م}}+\ldots$$

امثال کامل $\frac{1}{\text{لا}^{\text{م}}}$ کے $-$ لوک $\frac{\text{ح}(\text{لا})}{\text{لا}^2}$ مین مختلف ارقام کے منتخب کرنی سی جنمین لا واقع ہو حاصل ہو سکتی ہین ان ارقام کو اگر بہ ترتیب معکوس لکھین تو

$$\frac{1}{\text{م}}\left(\frac{\text{ع}}{\text{لا}}-\frac{\text{ق}}{\text{لا}^2}\right)^{\text{م}}+\frac{1}{\text{م}-1}\left(\frac{\text{ع}}{\text{لا}}-\frac{\text{ق}}{\text{لا}^2}\right)^{\text{م}-1}+\frac{1}{\text{م}-2}\left(\frac{\text{ع}}{\text{لا}}-\frac{\text{ق}}{\text{لا}^2}\right)^{\text{م}-2}+\ldots$$

اسیواسطے امثال $\frac{1}{لا^م}$ یہہ ہین کہ

$\frac{1}{م}ع^م - \frac{م}{م-1}\frac{م-1}{1}ع^{م-2}ق + \frac{م}{م-2}\frac{(م-2)(م-3)}{1\times 2}ع^{م-4}ق^2 -$

پس $ص_م = ع^م - م ن^{-2}ق + \frac{م(م-3)}{1\times 2}ع^{م-4}ق^2 - \ldots$

$+ (-1)^ر \frac{م(م-ر-1)\ldots(م-2ر+1)}{ر!}ع^{م-2ر}ق^ر + \ldots$

فرض کرو کہ ق = ۱ تو مساوات درجہ دوم مساوات شکافیہ ہوگی اور اوسکی قیمتین ۱ا اور $\frac{1}{1ا}$ کی موجب تبادلہ کے دفعہ ۱۳۲ کے ہونگین

پس ہم $ا + \frac{1}{ا} = ع$. رکہین تو

$ا^م + \frac{1}{ا^م} = ع^م - م ع^{م-2} + \frac{م(م-3)}{1\times 2}ع^{م-4}$

$+ (-1)^ر \frac{م(م-ر-1)\ldots(م-2ر+1)}{ر!}ع^{م-2ر} + \ldots$

پس ہم نی ایک جملہ بانیہ علی العموم $ا^م + \frac{1}{ا^م}$ کے واسطے ایسا حاصل کیا جسمین ارقام $ا + \frac{1}{ا}$ کی قوتین ہین دفعہ ۱۳۸ دیکہو

(۲۶۲) اب پہر یہہ فرض کرو کہ مساوات $لا^ن - ۱ = ۰$ کی قیمتون کی م قوتون کا حاصل جمع دریافت کرنا مطلوب ہے

یہان $\frac{ح(لا)}{لا^ن} = ۱ - \frac{1}{لا^ن}$

$\therefore$ لوک $\frac{ح(لا)}{لا^ن} = \frac{1}{لا^ن} + \frac{1}{2 لا^{2ن}} + \frac{1}{3 لا^{3ن}} + \frac{1}{4 لا^{4ن}} + \ldots$

یہان امثال $\frac{1}{لا^م}$ کے صفر ہین بشرطیکہ م اضعاف ن کا نہ ہو اور تب امثال $\frac{ن}{م}$ ہونگی اور

پس $ص_م = ۰$ بشرطیکہ م اضعاف ن کا نہ ہو اور اگر یہہ ہو گا تو $ص_م = ن$

یہہ نتیجہ بڑی کام کا ہی دفعات ائندہ مین اوسکی تین استعمال بیان کرینگے

(۲۶۳) اب ہم یہہ بتلائینگی کہ ایک سلسلہ معلوم کی خاص منتخب رقمون کا حاصل جمع کسطرح دریافت کرتی ہین

فرض کرو کہ $ح(لا) = ا_. + ا_1 لا + ا_2 لا^2 + \ldots$ لاانتہا اور مطلوب یہہ ہی کہ اس سلسلہ

$ا_م لا^م + ا_{م+ن} لا^{م+ن} + ا_{م+2ن} لا^{م+2ن} + \ldots$ لاانتہا

کا حاصل جمع دریافت کرین

فرض کرو کہ سہ و صہ و لر . . . ن مربتی کی نزدل واحد کی ہین یعنی ن قیمتین مساوات لا^ن - ۱ = ۰ کی ہین۔ اس منطابقہ کی طرفین کو سہ^ن-م مین ضرب دو اور لا کو سہ لا سے بدل دو

تو سہ^ن-م ح (سہ لا) = ا. سہ^ن-م + ا۱ سہ^ن-م+۱ لا + ا۲ سہ^ن-م+۲ لا^۲ + . . . اور اسیطرح

صہ^ن-م ح (صہ لا) = ا. صہ^ن-م + ا۱ صہ^ن-م+۱ لا + ا۲ صہ^ن-م+۲ لا^۲ + . . .

لر^ن-م ح (لر لا) = ا. لر^ن-۱ + ا۱ لر^ن-م+۱ لا + ا۲ لر^ن-م+۲ لا^۲ + . . .

اور علی ہذا القیاس

اب یہہ جو ن منطابقہ اسطرح بنائی جاوین اونکو جمع کرو تو بائین طرف ن گنا سلسلہ مطلوب کا بموجب دفعہ ۲۶۲ کے حاصل ہوگا بس

ام لا^م + ام+ن لا^م+ن + ام+۲ن لا^م+۲ن + . . .

= ۱/ن { سہ^ن-۱ ح (سہ لا) + صہ^ن-م ح (صہ لا) + لر^ن-م ح (لر لا) + . . . }

(۲۶۴) اب دفعہ ۲۶۲ کی استعانت سے ہم یہہ مسئلہ ثابت کرسکتے ہین کہ جملہ (لا + ی)^ن - لا^ن - ی^ن پورا پورا لا^۲ + لا ی + ی^۲ پر تقسیم ہوسکتی ہی اگر ن طاق صحیح عدد ہو اور ۳ پر پورا تقسیم نہ ہوتا ہو اور وہ (لا^۲ + لا ی + ی^۲)^۲ پر پورا تقسیم ہوگا اگر ن نسبت صحیح اس صورت ۶م + ۱ کا ہو

فرض کرو کہ ا و سہ و صہ واحد کی تین جزر الکعب ہین یعنی مساوات لا^۳ - ۱ = ۰ کی تین قیمتین ہین تو حاصل ضرب ان تین قیمتون کا بموجب دفعہ ۴۵ کے ا ہے

یعنی بموجب دفعہ ۴۵ کے سہ صہ = ۱ اور بموجب دفعہ ۲۶۲ کی ۱ + سہ^م + صہ^م = ۰ بشرطیکہ م اضعاف ۳ کا نہ ہو

پس لا^۲ + لا ی + ی^۲ = (لا - سہ ی) (لا - صہ ی)

اسی معلوم ہوا کہ (لا + ی)^ن - لا^ن - ی^ن پورا پورا تقسیم لا^۲ + لا ی + ی^۲ پر ہوتا ہی بشرطیکہ وہ لا = سہ ی سی اور لا = صہ ی سی معدوم ہوتا ہی اور وہ پورا (لا^۲ + لا ی + ی^۲)^۲ پر تقسیم ہوتا ہے بشرطیکہ اوسکا جملہ مشتق ن (لا + ی)^ن-۱ - ن لا^ن-۱ معدوم لا = سہ ی سے اور

لا = صہ د سے معدوم ہوتا ہو

جب لا = سہ د تو ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے

$$(لا + د)^{ن} - لا^{ن} - د^{ن} = د^{ن} \left[(۱ + سہ)^{ن} - سہ^{ن} - ۱ \right] = د^{ن} \left[(-صہ)^{ن} - سہ^{ن} - ۱ \right]$$

اور یہہ معدوم ہوتا ہے جب ن طاق ہو اور پورا ۳ پر نہ تقسیم ہوتا ہو

اور نیز جب لا = سہ د

$$ن (لا + د)^{ن-۱} - ن لا^{ن-۱} = ن د^{ن-۱} \left[(۱ + سہ)^{ن-۱} - سہ^{ن-۱} \right] = ن د^{ن-۱} \left[(-صہ)^{ن-۱} - سہ^{ن-۱} - ۱ \right]$$

یہہ معدوم ہوتا ہی اگر ن − ۱ جفت صحیح ہو اور اضعاف ۳ کا ہو کیونکہ $سہ^{۳} = ۱$ اور $صہ^{۳} = ۱$

اور اگر ن − ۱ جفت صحیح ہو اور اضعاف ۳ کا ہو تو یہہ استخراج ہوتا ہے کہ ن طاق صحیح ہے اور ۳ پر تقسیم نہیں ہوتا پس $(لا + د)^{ن} - لا^{ن} - د^{ن}$ ہی معدوم ہوتا ہے اور یہی نتیجہ حاصل ہو سکتا ہی اگر صہ د کو بجای لا کے رکھیں

(۲۶۵) اب آخر استعمال دفعہ ۲۶۲ کا یہہ ہی کہ ہم اس مسئلہ کو ثابت کریں فرض کرو کہ اس سلسلہ

$$۱ - \frac{ن - ۳}{۲} + \frac{(ن - ۴)(ن - ۵)}{|۳} - \frac{(ن - ۵)(ن - ۶)(ن - ۷)}{|۴} + \dots$$

$$+ (-۱)^{ر-۱} \frac{(ن - ر - ۱)(ن - ر - ۲) \dots (ن - ۲ر + ۱)}{|ر} + \dots$$

کا حاصل جمع ص ہے تو

ص = $\frac{۳}{ن}$ اگر ن طاق مثبت صحیح پورا ۳ پر تقسیم ہوتا ہو

ص = ۰ اگر ن طاق مثبت صحیح پورا ۳ پر نہ تقسیم ہوتا ہو

ص = $\frac{۱}{ن}$ اگر ن جفت مثبت صحیح پورا ۳ پر تقسیم ہوتا ہو

ص = $\frac{۲}{ن}$ اگر ن جفت مثبت صحیح پورا ۳ پر نہ تقسیم ہوتا ہو

دفعہ ۲۶۱ مین لا د کو بجای ق کی اور لا + د کو بجای ع کی رکھو تو $ص_{ن} = لا^{ن} + د^{ن}$

پس اگر ن مثبت صحیح ہے

$$(لا + د)^{ن} - لا^{ن} - د^{ن} = ن لا د (لا + د) \left[(لا + د)^{ن-۳} - \frac{ن - ۳}{۲} لا د (لا + د)^{ن-۵} + \frac{(ن - ۴)(ن - ۵)}{|۳} (لا د)^{۲} (لا + د)^{ن-۷} \dots \right] \dots (۱)$$

فرض کرو کہ ا و سہ و صہ واحد کے تین جزر الکعب ہوں لا = سہ د کی رکھو (۱) کی بائیں طرف کا رکن یہہ ہو جایگا کہ

$$ن\,سہ\,(۱+سہ)\,د^{ن}\left[(۱+سہ)^{ن-۳} - \frac{ن-۳}{۲}\,سہ\,(۱+سہ)^{ن-۵} + \frac{(ن-۴)(ن-۵)}{\underline{|۲}}\,سہ^{۲}(۱+سہ)^{ن-۷}\ldots\right]$$

لیکن سہ صہ = ۱ اور اسیواسطی $صہ^{۲}$ = سہ $صہ^{۲}$ = سہ اور سہ + صہ + ۱ = ۰

پس - صہ = سہ + ۱ پس سہ = $(سہ+۱)^{۲}$ اسی معلوم ہوا کہ بائیں طرف کا رکن (۱) کا تبدل ہو کر یہہ ہو گا کہ

$$ن\,(۱+سہ)^{ن}\,د^{ن}\left[۱ - \frac{ن-۳}{۲} + \frac{(ن-۴)(ن-۵)}{\underline{|۲}} - \ldots\right]$$

یعنی ن $(-صہ)^{ن}$ $د^{ن}$ ص

اور نیز جب لا = سہ د تو دائیں طرف کا رکن مساوات کا یہہ ہو جایگا کہ

$$د^{ن}\left[(۱+سہ)^{ن} - سہ^{ن} - ۱\right] \text{ یعنی } د^{ن}\left[(-صہ)^{ن} - سہ^{ن} - ۱\right]$$

اسیواسطی $(-صہ)^{ن} - سہ^{ن} - ۱ = ن\,(-صہ)^{ن}\,ص$ (۲)

اگر ن طاق صحیح پورا ۳ پر تقسیم ہوتا ہی تو دائیں طرف کا رکن (۲) کا برابر - ۳ کے بموجب دفعہ ۲۶۲ کی ہی اور اسیواسطی - ۳ = - ن $صہ^{ن}$ ص = - ن ص اسیواسطی ص = $\frac{۳}{ن}$

اگر ن طاق صحیح ہی اور ۳ پر پورا نہیں تقسیم ہوتا ہی تو دائیں طرف کا رکن (۲) کا صفر ہے بموجب دفعہ ۲۶۲ کے ہے اور اسیواسطے ص = ۰

اگر ن جفت صحیح ہی اور ۳ پر پورا تقسیم ہوتا ہی تو دائیں طرف کا رکن (۲) کا - ۱ ہے اور بائیں طرف کا رکن ن ص ہی اسیواسطی ص = $-\frac{۱}{ن}$

اگر ن جفت صحیح ہی اور ۳ پر پورا نہیں تقسیم ہوتا تو دائیں طرف کا رکن $صہ^{ن} - سہ^{ن} - ۱$ ہی یعنی ۲ $صہ^{ن}$ کیونکہ $سہ^{ن} + صہ^{ن} + ۱ = ۰$ پس ۲ $صہ^{ن}$ = ن $صہ^{ن}$ ص اور اسیواسطی ص = $\frac{۲}{ن}$

اس بات پر بھی خیال کرنا چاہیئی کہ سلسلہ جو ص سی تعبیر ہوتا ہی اوسمیں محدود تعداد رقموں کی ہے اور فی الحقیقت اگر ن = ۲ م یا ۲ م + ۱ کے ہو تو م رقمیں سلسلہ میں ہونگیں

(۲۶۶) مساوات کی قیمتون کے قوتون کی مجموعون کی قیمتون کو مساوات کی تقریبی قیمت دریافت کرنی اندر یہی کام مین لاتی ہین اس ترکیب کا بیان ہم مرفی صاحب کے رسالہ سائل معادلات سی نقل کرتی ہین
فرض کرو کہ ا ب س ... قیمتین مساوات کی ہین اور وہ سب حقیقی ہین اور تعداد اً ا سب سی بڑی قیمت ہے

اب ہم کو یہہ حاصل ہے کہ

$$\frac{ص_{م+۱}}{ص_م} = \frac{ا^{م+۱} + ب^{م+۱} + س^{م+۱} + \cdots}{ا^م + ب^م + س^م + \cdots}$$

$$= ا \; \frac{۱ + \left(\frac{ب}{ا}\right)^{م+۱} + \left(\frac{س}{ا}\right)^{م+۱} + \cdots}{۱ + \left(\frac{ب}{ا}\right)^م + \left(\frac{س}{ا}\right)^م + \cdots}$$

اب اگر م کو بڑا کافی فرض کرین تو بائین طرف کا رکن خاطر خواہ ا کے قریب ہو سکتا ہے
یعنی قریب سب سی بڑی عددی قیمت کے ہوتا ہے

(۲۶۷) اب ہم یہہ بیان کرتی ہین کہ اگر دفعہ گذشتہ مین خیالی قیمتین بھی ہون تو اوسکی نتیجہ مین کیا ترمیم ہو گی فرض کرو کہ $صہ + لر\sqrt{-۱}$ اور $صہ - لر\sqrt{-۱}$ ایک زوج مزدوجہ خیالی قیمتون کا ہو تو اوسکا مجموعہ ۲ صہ اور اوسکا حاصل ضرب $صہ^۲ + لر^۲$ ہو گا اور یہہ حاصل ضرب مربع اونکی قالب کا ہی جبر مقابلہ کا بچیسوان باب دیکھو

اب $صہ \pm لر\sqrt{-۱} = لب \left(\frac{صہ}{لب} \pm \frac{لر}{لب}\sqrt{-۱}\right)$

فرض کرو کہ $\frac{صہ}{لب} =$ جم بر اور $\frac{لر}{لب} =$ جب بر

پس مس بر $= \frac{لر}{صہ}$ اور $لب^۲ = صہ^۲ + لر^۲$

پس نسب قالب ہی اور مزدوج قیمتیں اس صورت مین لکھی جا سکتی ہین کہ

لب (جم بر $\pm \sqrt{-۱}$ جب بر) اور ڈی مو ئور کے ضابطہ سی مجموعہ دو قیمتون کی

م قوتون کا ۲ لب^م جم م بر ہے

پس اگر سب سے بڑی حقیقی قیمت کی عددی قدر بڑی خیالی قیمتون کی قالب سی ہو تو $\frac{ص_{م+۱}}{ص_م}$ لانہایت زیادہ ہوتی ہی ایک حد خاص کی طرف مائل ہو گی یعنی سب سے

بڑی قیمت کی طرف از روی تعداد کی لیکن اگر سب سے بڑی حقیقی قیمت کی مقدار دی خیالی قیمتوں کی قالب سی بڑی نہ ہو تو $\frac{ص_{م+١}}{ص_م}$ کی کوئی حد غائی نہ ہو گی

(۲۶۸) مثال لا^۳ - ۲لا - ۵ = ۰ یہاں سلسلہ ص$_۱$ و ص$_۲$ و ص$_۳$ ۰ ۰ ۰
۰ و ۴ و ۱۵ و ۸ و ۵۰ و ۹۱ و ۱۴۰ و ۴۳۲ و ۷۳۵ و ۱۵۶۴ ۳۰ ۳۴۶ ۳ و ۳۰۶۸ و ۱۵۰۸۰

و ۳۱۷۵۶ و ۵ ۶۴۱ و ۱۳۸۹۱۲ و ۲۸۷۱۳۰ و ۵۹۸۴۹۹ ۰ ۰ ۰ ۰ ہے

ہر ایک رقم کو اوسکی ماقبل کی رقم پر تقسیم کرتی ہیں تو یہہ معلوم ہوتا ہی کہ ماحصل کو ایک سلسلہ ۲ کی حد کی طرف ہی اسی یہہ نتیجہ نکالتی ہیں کہ ایک حقیقی قیمت کچھہ بڑی ۲ سی ہی مگر یہہ مثال اس ترکیب کے واسطی مناسب نہیں ہی کیونکہ حاصل ضرب تمام قیمتوں کا ۵ ہی اور ایک حقیقی قیمت کچھہ زیادہ ۲ سے اور باقی دو قیمتوں کا حاصل ضرب تقریباً ۵ر۲ ہی یہہ دو قیمتیں بموجب دفعہ ۱۷۲ کے خیالی ہیں اور چونکہ اونکا قالب اونکی حاصل ضرب کا جذر ہی تو قالب بڑا بہ نسبت ۵ر۱ کے ہوا پس قالب بمقابلہ حقیقی قیمت کی بہت چھوٹا نہیں ہی پس جملہ $\frac{ص_{م+١}}{ص_م}$ آہستہ آہستہ ایک حد غائی کی طرف پہونچتا ہے

(۲۶۹) دفعہ ۲۶۶ کے ترکیب کے متماثل ایک ترکیب ہے جس سے کہ تعداداً سب سی بڑی دو قیمتوں کا حاصل ضرب خاص صورتوں میں معلوم ہو جاتا ہے

اسواسطی کہ $ص_م = ا\,ا^م + ب\,ب^م + س\,س^م + \cdots$

$$ص_{م+١} = ا\,ا^{م+١} + ب\,ب^{م+١} + س\,س^{م+١} + \cdots$$

$$ص_{م+٢} = ا\,ا^{م+٢} + ب\,ب^{م+١} + س\,س^{م+١} + \cdots$$

اسیواسطے $ص_م\,ص_{م+٢} - ص^٢_{م+١} = ا\,ب\,ا^م\,ب^م\,(ا - ب)^٢ + ا\,س\,ا^م\,س^م\,(ا - س)^٢$
$+ ب\,س\,ب^م\,س^م\,(ب - س)^٢ + \cdots$

اسکو لوم سے تعبیر کرو تو

$$لوم = ا\,ب\,ا^م\,ب^م\,(ا - ب)^٢ \left[١ + \frac{س\,س^م}{ب\,ب^م} \left(\frac{ا - س}{ا - ب}\right)^٢ + \frac{س\,س^م}{ا\,ا^م} \left(\frac{ب - س}{ا - ب}\right)^٢ + \cdots \right]$$

اب بموجب دفعہ ۲۶۶ و ۲۶۷ کے عمل کرنے سی ہم کو نتایج مفصلہ ذیل حاصل ہونگے

(۱) اگر سب حقیقی قیمتین ہین تو $\frac{\text{لوم}+1}{\text{لوم}}$ کو خاطرخواہ م کی زیادہ کرنے سے تعداداً دو سب سے بڑی قیمتون کے حاصل ضرب کے قریب لا سکتی ہین

(۲) اگر حقیقی قیمتین تعداداً بڑی کسی خیالی قیمت کی قالب سی ہی تو $\frac{\text{لوم}+1}{\text{لوم}}$ کی حدغائی ہوگی یعنی ان قیمتون مین سی سب سی بڑی دو قیمتون کا حاصل ضرب

(۳) اگر تعداداً سب سی دو بڑی قیمتون کی حاصل ضرب کی جذر سی خیالی قیمتون کا قالب بڑا ہے تو $\frac{\text{لوم}+1}{\text{لوم}}$ کی حدغائی کی قیمت ہوگی یعنی مجذور اوس قالب کا ہوگا یعنی حاصل ضرب اون خیالی قیمتون کے حاصل ضرب کا جنکا وہ قالب تہا

(۴) پس صرف ایک صورت جسمین $\frac{\text{لوم}+1}{\text{لوم}}$ سی حدغائی کی نہ ہونی کا نقص عاید ہوتا ہے یہہ ہی کہ ایک صرف حقیقی قیمت ہو اور خیالی قیمتون کی سب سے بڑی قالب سے تعداداً بڑی ہو اس صورت مین حقیقی قیمت موافق دفعہ ۲۶۷ کے دریافت ہوجاتی ہے

(۲۷۰) بعض صورتون مین اسی ترکیب کے متماثل ترکیب سی حاصل جمع یہی دو قیمتون کا دریافت کر سکتی ہیں

$ص_م$ و $ص_{م+1}$ و $ص_{م+2}$ اور $ص_{م+3}$ کی قیمتون سی ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہی کہ

$$ص_م ص_{م+3} - ص_{م+1} ص_{م+2} = ا^م ب^م (ا+ب)(ا-ب)^2 + ا^م س^م (ا+س)(ا-س)^2$$

$$+ ب^م س^م (ب+س)(ب-س)^2 + \dots$$

اب اسکو معم سی تعبیر کرو پس موم کی معنی تو دفعہ گذشتہ مین مقرر ہوگئی ہین اب ہم یہان یہہ دریافت کرینگے $\frac{\text{معم}}{\text{لوم}}$ کی ایک حدغائی اون صورتون مین ہی جنکا ذکر اوپر کی دفعہ مین ہوا اور یہہ حدغائی مجموعہ تعداداً سب سی بڑی دو قیمتون کا ہی یا مجموعہ دو خیالی قیمتون کا ہی جنکا قالب سب سے بڑا ہے

(۲۷۱) پس دفعہ ۲۶۹ کی (۱) و (۲) و (۳) صورتون مین حاصل ضرب دو قیمتون کا بموجب دفعہ ۲۶۹ کی اور اونکا مجموعہ بموجب دفعہ ۲۷۰ کے حاصل ہوسکتا ہے اور (۱) اور (۲) کی صورتون مین بموجب دفعہ ۲۷۰ کی دو قیمتون کا مجموعہ معلوم ہوسکتا ہے

اور دفعہ ۲۶۶ کے اونمین سی بڑی قیمت معلوم ہو سکتی ہے

(۲۷۲) مثال $لا^۴ + لا^۳ + ۴لا^۲ - ۴لا + ۱ = ۰$

یہان بہ تفصیل ذیل قیمتین حاصل ہوتی ہین

ارقام ص۱ و ص۲ . . . کے واسطے

-۱ و -۷ و ۲۳ و -۳ و -۱۱۶ و ۲۲۷ و ۲۰۲ و -۱۵۷۱ . . . . .

ارقام لو۱ و لو۲ و . . . کے واسطے

-۷۲ و -۵۰۸ و -۲۶۷۷ و -۱۴۱۳۷ و -۷۴۹۶۱ و -۳۹۷۴۲۱ . . .

اور ارقام مو۱ و مو۲ . . کے واسطے

۱۶۴ و ۸۸۱ و ۴۷۸۳ و ۲۵۷۲۶ و ۱۳۶۳۸۲ . . . . .

اب یہان سلسلہ ص۱ و ص۲ . . . مین ایک رقم کو ماقبل کی رقم پر تقسیم کرنی سی ایک محدود حد غایۃ نہین حاصل ہوتی اسی ہم کو یہہ قطعی معلوم ہوتا ہی کہ مساوات کی خیالی قیمتین ہین اور سلسلہ لو۱ و لو۲ . . . کو اپنی ماقبل کی رقم پر تقسیم کرنی سی وہ خارج قسمت حاصل ہوتی ہین جنسی معلوم ہوتا ہے کہ دو قیمتون کی حاصل ضرب کی قدر ۳۰ء۵ ہی اور سلسلہ مو۱ و مو۲ . . . کی ہر ایک رقم سلسلہ لو۱ و لو۲ . . . کی ہر ایک رقم متناظر پر تقسیم کرنے سی وہ خارج قسمت حاصل ہوتی ہین جنسی معلوم ہوتا ہی کہ مجموعہ ان دو قیمتون کا - ۸۱۹ء ا ہے

پس ان دو قیمتون سی ہم دو خیالی قیمتین تقریباً دریافت کر سکتی ہین

اور چونکہ مساوات کی لئی چارون قیمتون کا مجموعہ - ا ہی اور اوسکا حاصل ضرب ا ہی تو مجموعہ باقی دو قیمتون کا وغیرہ ۸۱۹ء ہی اور اوسکا حاصل ضرب وغیرہ $\frac{۱}{۳۰ء۵}$ ہی اسواسطی یہہ دو قیمتین بہی خیالی ہین

پس اسطرح ہم کو یہہ معلوم ہوگا کہ خیالی قیمتوں کے اول زوج کا قالب پانچ گنہ دوسرے خیالی قیمتوں کے زوج کی قالب سی ہی اسی معلوم ہوا کہ بموجب طریقہ کیا بت دفعہ ۲۷۰ کے ہم کو دریافت

دریافت ہوگا کہ لو م = ا م ب ا (ا - ب) اب اور ارقام کو چھوڑ دین تو غلطی بقدر

$\frac{1}{5^m}$ حصہ کل کی قریب واقع ہوگی اور اسی ہم اپنی نتیجہ کی صحت کا اندازہ کر سکتی ہین

مثلاً ہم نی اوپر قیمتین لو ا کی لو ۵ اور لو ۲ تک لکھی ہین تو حاصل ضرب کے دریافت کرنے

مین غلطی قریب ($\frac{1}{5^5}$) وین حصہ کل کے واقع ہوگی

بائیسوان باب دور کرنا مقادیر مجہول کا یعنی اسقاط

(۲۷۳) فرض کرو کہ دو ہمزاد مساواتین دو مجہول کی ہم کو حل کرنی ہین بعض صورتین ایسی ہوتی ہین

کہ جنمین اونکا حل کرنا نہایت آسان ہوتا ہی فرض کرو کہ لا اور ی مقادیر مجہول کو تعبیر کرتی ہین

پس اگر ایک مساوات مین لا ملتف ہو اور کوئی اور قوت لا کی نہ ملتف ہو تو اس مساوات سی لا کی

قیمت ی کی رقموں مین دریافت کرین اور اوسکو دوسری مساوات مین مندرج کرین تو ایک مساوات

حاصل ہو جائیگی جسمین فقط مقدار مجہول ی ہی ملتف ہوگی اور اوسکی قیمتین تقریبی یا تحقیقی اون

ترکیبوں سی دریافت ہونگیں جو اوپر بیان ہوئین

اب پہر فرض کرو کہ مساواتین ا = ۰ ب = ۰ سی تعبیر ہوتی ہین اور ا اور ب

جلدی سے اجزاء ضربی مین تحلیل ہو سکتی ہین مثلاً فرض کرو کہ ا = ل و ل' و ل'' اور ب = ھ و ھ'

تو معادلات مفروضہ کی تمام حل ان ہمزاد مساواتوں کے حل کرنی سی حاصل ہونگی کہ ل = ۰ ھ = ۰ و

ل = ۰ اور ھ' = ۰ ل' = ۰ اور ھ = ۰ ل' = ۰ اور

ھ' = ۰ اور ل'' = ۰ اور ھ = ۰ اور ل'' = ۰ اور ھ' = ۰ پس حل معادلات مفروضہ

کا اون معادلات کی حل پر موقوف ہوا جو معادلات مفروضہ سی درجہ کم رکھتی ہین

یہہ ہو سکتا ہی کہ ا کے اجزاء ضربی مین سی ایک ب کی اجزاء ضربی مین کے کسی ایک ساتھہ بالکل مطابق ہو

مثلاً فرض کرو کہ ل و اور ھ و متطابق ہین تو کوئی سی قیمتین لا اور ی کی جو مساوات ل = ۰ کی شرائط کو

پورا کرینگے وہ ہمزاد مساوان ا = ۰ اور ب = ۰ کی شرائط کو بھی پورا کرینگے

پس اگر ل مین لا اور ی دو ملتف ہین تو ہم مقادیر مجہول مین سی ایک کیواسطی جو قیمت چاہین

مقرر کرین اور دوسرے قیمت اوسکی مطابق نکال لین اور اسطرح سی جتنی حل چاہین دریافت کرین
گر لومین ایک مقدار مجہول مقادیر مجہولہ مین سی ملتفی ہو تو ہم معادلات
ا = ۰ اور ب = ۰ کی شرائط کو پورا اوس مقدار مجہول کے اوس قیمت سی کر سکتی ہین
جو مساوات لو = ۰ سی مستنبط ہو اور دوسری مقدار مجہول کی واسطی خواہ کچہ ہی قیمت مقرر کرین

(۲۷۴) ہم نی اوپر بیان کیا ہی کہ دو مقادیر مجہول کی دو مساواتون سی کسطرح مسائل جملہ بالقرینہ کے
استعانت سی ہم ایک مجہول مقدار کو دور کرتی ہین اور ایک مساوات دوسرے مقدار مجہول کی حاصل
کرتی ہین اب ہم مقدار مجہول کی دور کرنی کی ایک اور ترکیب بیان کرتی ہین وہ دو جبریہ جملون کے
دفق اعظم دریافت کرنی کی عمل پر موقوف ہی

(۲۷۵) فرض کرو کہ دو ہمزاد مساواتین ح (لا و ی) = ۰ اور ح$_۲$ (لا و ی) = ۰
سی تعبیر کی جائین اور لا = سہ اور ی = صہ کی ایسی قیمتین ہون کہ اونسی مساوات کی شرائط پوری ہوتی ہون
تو مساوات ح (لا و صہ) = ۰ اور ح$_۲$ (لا و صہ) = ۰ کی شرائط لا = سہ سی پوری ہونگین
اسی معلوم ہوا کہ ح (لا و صہ) و ح$_۲$ (لا و صہ) کا ایک دفق مشترک ہوا اور یہہ دفق مشترک
ایسا ہو کہ جب اوسکو برابر صفر کی لکہین تو اوسی قیمتین سہ کی ہاتہہ لگ جائین اور نیز وہ
قیمت یا قیمتین حاصل ہو جائین جو ی = صہ کی ساتہہ شریک ہو کر معادلات مفروضہ کی
شرائط کو پورا کرین

پس فرض کرو کہ ح (لا و ی) اور ح$_۲$ (لا و ی) کی لا کی قوا متنازلہ کی ترتیب سی لکہین
اور حسب معمول اوسکا دفق اعظم دریافت کرین اور یہانتک عمل کرین کہ اخر کو ایک جملہ ی کا
باقی مین حاصل ہو اوسکا نام ح (ی) رکہو تو کوئی ایسی قیمت ی کی داخل ہونی قابل نہین ہو گی جب تک کہ وہ
ح (ی) = ۰ کی نہ کری اسواسطی کہ اگر ح (ی) معدوم نہ ہو تو ح (لا و ی) و ح$_۲$ (لا و ی)
کا کوئی دفق مشترک نہین ہونی کا اسواسطی وہ ایک ہی وقت معدوم نہین ہونگے — مگر اسکا
بالعکس درست نہین کہ ہر ایک قیمت ی جو ح (ی) کو فنا کرتا ہی وہ ضرور داخل ہونی کی قابل ہے

اسواسطی کہ اثناء عمل مین یہہ واقع ہوسکتا ہی کہ بعض قوا لا کی امثال مکسور ہوں جنکی نسب نمایون
مین ی ملتف ہو اور ایک قیمت جو مساوات مح (ی) = ۰ کی شرایط کو پورا کرتی ہو ان نسب نمایون
کو معدوم کردی اور اسطرح سی لا انتہا اور غیر المعین مقادیر داخل کردی

مثلاً فرض کرو کہ ہم کو یہہ حاصل ہے کہ

ح۱ (لا ی) = ق ح۲ (لا ی) + مح (ی)

پس اگر ق ایک جملہ صحیحہ ہی تو وہ ی کی کسی محدود قیمت سی غیر متناہی ہوگا اور کوئی قیمت ی کی جو
مح (ی) کو معدوم کرتی وہ اوس لا کی قیمت کی ساتھہ شامل ہوکر جو مساوات ح۲ (لا ی) = ۰
سی موافق اس ی کی قیمت کی نکلتی ہی ح۱ (لا ی) کو معدوم کریگی لیکن اگر ق کسر ہو
اور اوسکی نسب نما مین ی ملتف ہو تو جب مح (ی) معدوم ہو تو ق غیر متناہی ہوسکتا ہے
اور کچھ ضرور نہین کہ ح۱ (لا ی) معدوم ہو جب مح (ی) = ۰ اور ح۲ (لا ی) = ۰ یہہ صورت مستثنی
اوس حالت مین بھی ہوسکتی ہی کہ ہم عمل حسب دستور کرین اور ایسی اجزاء ضربی داخل کرین کہ امثال
مکسور سی بچ جائین مثلاً فرض کرو کہ ہم ح۱ (لا ی) کو کسی مقدار س مین ضرب دیتی ہین تاکہ ہم اون
امثال مکسور سی بچ جائین جو ی کے جملے مین اور اب ہم فرض کرتے ہین کہ

س ح۱ (لا ی) = ق ح۲ (لا ی) + مح (ی)

اب اگر ی کو مساوات مح (ی) = ۰ سی دریافت کرین اور یہہ مساوات ح۲ (لا ی) = ۰ سے
دریافت کرین تو جو قیمت اسطرح حاصل ہونگی وہ ضرور س ح۱ (لا ی) کو معدوم کرینگے
مگر اس سے یہہ نہین نکلتا کہ ح۱ (لا ی) معدوم ہوتا ہے کیونکہ یہہ ہوسکتا ہی کہ جو قیمت ی کی ہم نے
لی وہ س کو معدوم کرے

اس سی معلوم ہوا کہ ایک قاعدہ کی ضرورت ہی جسسی یہہ معلوم ہو کہ کون سی حل مساواتون مین
داخل ہونی کی قابل ہین اب ہم اوس قاعدہ کو بتلاتی ہین — ہم یہہ فرض کرتی ہین کہ ذو قسمۃ مشترک
اعظم کی دریافت کرتی ہین حسب دستور اس باب مین احتیاط کی گئی ہی کہ امثال مکسورہ واقع ہوں

ہم یہہ فرض کر سکتی ہیں کہ مساواتین جو ا = ۰ اور ب = ۰ تعبیر کرتے ہیں اوسمین نہ ا اور نہ ب میں کوئی جز ضربی ایسا واقع ہی کہ وہ صرف د ہی کا جملہ ہو کیونکہ ایسا جملہ کا ہم جداگانہ خیال کر سکتی ہیں اور جو حل اوسپر موقوف ہوں وہ دریافت کر سکتی ہیں جو ترکیب ہم اب لکھتی ہیں وہ لابیٹی صاحب اور سارس صاحب نی ایجاد کی تھی اوسکو میر جو کوئرٹ کے جبر مقابلہ سی نقل کرتی ہیں

(۲۷۶) فرض کرو کہ دو ہمزاد مساواتین ا = ۰ اور ب = ۰ سی تعبیر ہوتی ہیں اور یہہ بھی ہم فرض کرتی ہیں کہ نہ ا ایسا ہی نہ ب ایسی ہی کہ اوسمین کوئی جز ضربی ایسا واقع ہو کہ وہ صرف د کا جملہ ہو اور س وہ جز ضربی ہی جسکو ا مین اسلئی ضرب دیتی ہیں کہ وہ ب پر تقسیم ہو فرض کرو کہ ق خارج قسمت نکلتا ہی اور ر باقی بچتی ہی جسمین ر جملہ صرف د کا ہی فرض کرو کہ س، وہ جز ضربی جسکو ب مین اسلئی ضرب دیتی ہیں کہ وہ ر پر تقسیم ہو فرض کرو کہ اس تقسیم کرنی مین ق، خارج قسمت نکلتا ہی اور س، ر، باقی بچتی ہی اور اسمین س، صرف د کا جملہ ہے اسی طرح عمل کئی جاؤ اور تمثیلاً فرض کرو کہ چوتھی تقسیم پر ہم کو ایک ایسی باقی حاصل ہوتی ہے کہ جسمین لا داخل نہیں ہی اور اوسکو ہم ر س۳ سی تعبیر کرتی ہیں پس مطابق ذیل ہم کو حاصل ہونگے

$$\left.\begin{aligned} س\,ا &= ق\,ب + ر\,ر \\ س_۱\,ب &= ق_۱\,ر + س_۱\,ر_۱ \\ س_۲\,ر &= ق_۲\,ر_۱ + س_۲\,ر_۲ \\ س_۳\,ر_۱ &= ق_۳\,ر_۲ + ر_۳ \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (۱)$$

فرض کرو کہ د، دو فق اعظم س اور ر کا ہی اور د، دو فق اعظم $\frac{س\,س_۱}{د}$ اور س، کا ہے اور د۲ دو فق اعظم $\frac{س\,س_۱\,س_۲}{د\,د_۱}$ اور ر۲ کا ہی اور د۳ دو فق اعظم $\frac{س\,س_۱\,س_۲\,س_۳}{د\,د_۱\,د_۲}$ اور ر۳ کا ہے اب ہم یہہ ثابت کرینگے کہ معادلات ا = ۰ اور ب = ۰ کے حل ان نظموں کے حل کرنے سے حاصل ہونگے

$$\left.\begin{array}{l} \frac{ب}{د} = ۰ \text{ اور } ل = ۰ \\ \frac{ب_۱}{د_۱} = ۰ \text{ اور } ر = ۰ \\ \frac{ب_۲}{د_۲} = ۰ \text{ اور } ر_۱ = ۰ \\ \frac{ب_۳}{د_۳} = ۰ \text{ اور } ر_۲ = ۰ \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (۲)$$

اول ہی ہم یہہ ثابت کرتی ہین کہ تمام حل جو معادلات (۲) سی حاصل ہونگی اونسی معادلات ا = ۰ اور ل = ۰ کی شرائط پوری ہونگین اور دوئم ہم یہہ ثابت کرینگے کہ تمام قیمتین جو لا اور ر کی معادلات ا = ۰ اور ل = ۰ کی شرائط کو پورا کرتی ہین وہ نظم (۲) کے حلوں مین داخل ہونگین

اول متطابقہ (۱) کے دونو ارکان کو د پر تقسیم کرو تو

$$\frac{س}{د} ا = \frac{ق}{د} ل + \frac{ب}{د} ر \qquad (۳)$$

اب بموجب فرض کی $\frac{س}{د}$ اور $\frac{ب}{د}$ دونو جملی صحیحہ ہی ہین پس $\frac{ق ل}{د}$ بھی جملہ صحیح ہوا لیکن بموجب فرض کی ل کا کوئی جز ضربی ایسا نہین ہی کہ وہ فقط د ہی کا جملہ ہو اسواسطے ق کو د پورا تقسیم کرتا ہے

متطابقہ (۳) سی ثابت ہوتا ہی کہ لا اور ر کی قیمتین جو معادلات $\frac{ب}{د} = ۰$ اور ل = ۰ کی شرائط کو پورا کرتی ہین وہ $\frac{س}{د}$ ا کو معدوم کرتی ہین لیکن $\frac{س}{د}$ اور $\frac{ب}{د}$ بموجب فرض کے کوئی جز ضربی رکھتی نہین اسلئی یہہ قیمتین ا کو بھی معدوم کرتی ہین پس اسی معلوم ہوا کہ معادلات $\frac{ب}{د} = ۰$ اور ل = ۰ کی تمام حل معادلات ا = ۰ اور ل = ۰ کی شرائط کو پورا کرتے ہین

اب پھر متطابقہ (۳) کی دو ارکان کو س۱ مین ضرب دو اور متطابقہ (۱) کے دوسرے مساوات سی س۱ ل کا مساوی لہ حاصل ہوا اوسکو س۱ ل کی جگہ رکھی تو

$$\frac{س س_۱}{د} ا = \frac{س_۱ ر + ق ق_۱}{د} ر + \frac{ق ب_۱}{د} ر_۱$$

جملہ $\frac{س_۱ ر + ق ق_۱}{د}$ ایک صحیح جملہ ہی اسواسطی کہ ر اور ق پوری تقسیم د پر ہوتی ہین اور علاوہ برین یہہ جملہ د۱ پر بھی پورا تقسیم ہوتا ہی اسواسطے کہ $\frac{س س_۱ ا}{د}$ کو د۱ تقسیم کرتا ہے

اور ر کو ر١ پورا انہیں تقسیم کرتا ہی د١ پر تقسیم کرو اور اختصاراً بجای $\frac{\text{ق}}{\text{د}}$ کے
م١ اور $\frac{\text{س}_1\,\text{ر} + \text{ق ق}_1}{\text{د د}_1}$ کے م٢ رکہو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{\text{س س}_1}{\text{د د}_1}\,\text{ا} = \text{م}_1\,\text{ر}' + \frac{\text{ر}'_1}{\text{د}_1}\,\text{م}\,\text{ر}'_1 \qquad (4)$$

اب (۱) کے متطابقوں مین دوسرے کی دونو ارکان کو $\frac{\text{س}_1}{\text{د}}$ مین ضرب دو تو

$$\frac{\text{س س}_1}{\text{د}}\,\text{ب} = \frac{\text{س ق}_1}{\text{د}}\,\text{ر}' + \frac{\text{س}}{\text{د}}\,\text{ر}_1\,\text{ر}'_1$$

چونکہ د١ تقسیم $\frac{\text{س س}_1}{\text{د}}$ اور ر١ کو کرتا ہی تو وہ $\frac{\text{س ق}_1}{\text{د}}$ رَ کو بہی تقسیم کریگا لیکن رَ پورا د١ پر نہین تقسیم ہوتا ہی اسواسطی $\frac{\text{س ق}_1}{\text{د}}$ پورا تقسیم ہونا چاہیی د١ پر تقسیم کرو اور اختصاراً $\frac{\text{س}_1}{\text{د}}$ کی جگہ ن اور $\frac{\text{س ق}_1}{\text{د د}_1}$ کے جگہ ن١ رکہو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{\text{س س}_1}{\text{د د}_1}\,\text{ب} = \text{ن}_1\,\text{ر}' + \frac{\text{ر}_1}{\text{د}_1}\,\text{ن}\,\text{ر}'_1 \qquad (5)$$

(۴) اور (۵) متطابقوں سی یہہ ثابت ہو کہ تمام قیمتین جو ا اور ب کی $\frac{\text{ر}_1}{\text{د}_1}$ اور رَ کو معدوم کرتی ہین وہ $\frac{\text{س س}_1}{\text{د د}_1}$ ا اور $\frac{\text{س س}_1}{\text{د د}_1}$ ب کو فنا کرتی ہین لیکن $\frac{\text{س س}_1}{\text{د د}_1}$ اور $\frac{\text{ر}_1}{\text{د}_1}$ مین کوئی جزضربی مشترک نہین اسواسطے تمام حل معادلات $\frac{\text{ر}_1}{\text{د}_1} = 0$ اور رَ $= 0$ مساوات ا $= 0$ اور ب $= 0$ کی شرائط کو پورا کرتے ہین

اب متطابقہ (۴) کی دونو ارکان کو س٢ مین ضرب دو اور س٢ رَ کی جگہ اوسکا مساوی لو جو (۱) کے متطابقون مین سی تیسری متطابقہ سی حاصل ہو (۱) مین رکہو تو

$$\frac{\text{س س}_1\,\text{س}_2}{\text{د د}_1}\,\text{ا} = \left(\text{ق}_2\,\text{م}_1 + \frac{\text{س}_2\,\text{ر}_1}{\text{د}_1}\,\text{م}\right)\text{ر}'_1 + \text{ر}_2\,\text{م}_1\,\text{ر}'_2$$

بموجب فرض کی د٢ اول رکن کو اس متطابقہ کے تقسیم کرتا ہے اور د٢ ر٢ کو بہی تقسیم کرتا ہی اسواسطی (ق٢ م١ + $\frac{\text{س}_2\,\text{ر}_1}{\text{د}_1}$ م) پورا د٢ پر تقسیم ہوگا اس خارج قسمت کو م٢ سے تعبیر کرو تو

$$\frac{\text{س س}_1\,\text{س}_2}{\text{د د}_1\,\text{د}_2}\,\text{ا} = \text{م}_2\,\text{ر}'_1 + \frac{\text{ر}_2}{\text{د}_2}\,\text{م}_1\,\text{ر}'_2 \qquad (6)$$

اب متطابقہ (۵) کے دونو ارکان کو س٢ مین ضرب دو اور س٢ رَ کی جگہ اوسکا

مساوی لہ جو (۱) کے متطابقون مین تیسری سی نکلے درج کرو تو

$$\frac{س\ س_۱\ س_۲}{د\ د_۱} ب = (ق_۲ ن_۱ + \frac{س_۲ ر_۱}{د_۱} ن) ر_۱ + ر_۲ ن_۱ ر_۲$$

موافق سابق کی ہم ثابت کر سکتی ہین کہ ر۱ کے امثال پوری د۲ پر تقسیم ہوتی ہین اور اس خارج قسمت کو ق۲ سی تعبیر کرتے ہین تو ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{س\ س_۱\ س_۲}{د\ د_۱\ د_۲} ب = ن_۲ ر_۱ + \frac{ر_۲}{د_۲} ن_۱ ر_۲ \qquad (۷)$$

اب (۶) (۷) متطابقون سی ثابت ہوتا ہی کہ تمام قیمتین لا اور ر کی جو $\frac{ر_۲}{د_۲}$ اور ر۲ کو معدوم کرتی ہین وہ ان متطابقون کی اول رکن کو بہی معدوم کرتی ہین لیکن $\frac{س\ س_۱\ س_۲}{د\ د_۱\ د_۲}$ اور $\frac{ر_۲}{د_۲}$ کا کوئی جز ضربی نہین ہی اور اسیواسطے تمام حل معادلات $\frac{ر_۲}{د_۲} = ۰$ اور ر۲ = ۰ کی شرائط کو پورا کرتی ہین وہ معادلات ا = ۰ اور ب = ۰ کی شرائط کو بہی پورا کرتی ہین

اب اسیطرح موافق سابق کی (۶) اور (۷) متطابقون کو س۳ مین ضرب دیتی ہین س۳ ر۲ کی جگہ اوسکا مساوی لہ جو (۱) کی متطابقون مین چوتہی سی نکلی درج کرتی ہین تو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{س\ س_۱\ س_۲\ س_۳}{د\ د_۱\ د_۲\ د_۳} ا = م_۳ ر_۲ + \frac{ر_۳}{د_۳} م_۲ \qquad (۸)$$

$$\frac{س\ س_۱\ س_۲\ س_۳}{د\ د_۱\ د_۲\ د_۳} ب = ن_۳ ر_۲ + \frac{ر_۳}{د_۳} ن_۲ \qquad (۹)$$

اسمین م۳ اور ن۳ جملی صحیحہ لا اور ر کے ہین اب متطابق (۸) اور (۹) سی ثابت ہوتا ہے کہ تمام حل معادلات $\frac{ر_۳}{د_۳} = ۰$ اور ر۲ = ۰ معادلات ا = ۰ اور ب = ۰ کی حل ہین

اب ہم نے اپنی دعوی کا اول جزو ثابت کر دیا یعنی تمام حل جو نظم معادلات (۲) سی حاصل ہوتے ہین وہ معادلات ا = ۰ اور ب = ۰ کی شرائط کو پورا کرتے ہین

اب ہم کو یہہ ثابت کرنا ہی کہ تمام قیمتین جو معادلات ا = ۰ اور ب = ۰ کی شرائط کو پورا کرتی ہین وہ نظم (۲) کے جملون مین موجود ہوتی ہین متطابقہ (۳) کو اسطرح لکہ سکتی ہین کہ

$$ن\ ا - م\ ب = \frac{ر}{د} ر \qquad (۱۰)$$

(۴) کو ب مین اور (۵) کو ا مین ضرب دو اور تفریق کرو تو

(م ب − ن ا) ر + (م ب − ن ا) ر/د ر۱ = ۰

اور اسیواسطی بموجب (۱۰) کے

(م۱ ب − ن۱ ا) ر − ر ر۱/د د۱ ر ر۱ = ۰

اور اسیواسطے

م۱ ب − ن۱ ا = ر ر۱/د د۱ ر۱ (۱۱)

(۶) کو ب مین اور (۷) کو ا مین ضرب دو اور تفریق کرو تو

(م۲ ب − ن۲ ا) ر۱ + (م۱ ب − ن۱ ا) ر۲/د۲ ر۲ = ۰

اور اسیواسطی بموجب (۱۱) کے

(م۲ ب − ن۲ ا) ر۱ + ر ر۱ ر۲/د د۱ د۲ ر۱ ر۲ = ۰

اور اسیواسطی م۲ ب − ن۲ ا = − ر ر۱ ر۲/د د۱ د۲ ر۲ (۱۲)

اور علی ہذا القیاس (۸) اور (۹) سی ہم یہہ مستنبط کرتے ہین کہ

م۳ ب − ن۳ ا = ر ر۱ ر۲ ر۳/د د۱ د۲ د۳ (۱۳)

متدالبقہ (۱۴) بتلا رہا ہی کہ تمام قیمتین لا اور ر کی جو ا اور ب کو معدوم کرتے ہین وہ
ر ر۱ ر۲ ر۳/د د۱ د۲ د۳ کو بہی معدوم کرتی ہین پس اجزاء ضربی ر/د اور ر۱/د۱ اور ر۲/د۲
اور ر۳/د۳ مین ضرور ایک معدوم ہوگا اسی معلوم ہوا کہ معادلات

ر/د = ۰ اور ر۱/د۱ = ۰ اور ر۲/د۲ = ۰ اور ر۳/د۳ = ۰

سے تمام قیمتین ر کی جو داخل ہونی کی قابل ہین انضرام پاتے ہین
پس فرض کرو کہ لا = س اور ر = ص قیمتین ہین جو معادلات ا = ۰ اور ب = ۰
کی شرائط کو پورا کرتی ہین
اول فرض کرو کہ ص ایک قیمت مساوات ر/د = ۰ کی ہی تو یہہ ظاہر ہی کہ قیمتین لا = س

اور ی = صہ معادلات $\frac{ر}{د} = ۰$ اور ر = ۰ کی شرایط کو پورا کریگی

دوم فرض کرو کہ صہ قیمت مساوات $\frac{ر}{د} = ۰$ کی نہین ہے لیکن وہ قیمت مساوات $\frac{ر_۱}{د_۱} = ۰$ کی ہے

چونکہ ی = صہ سی $\frac{ر}{د}$ معدوم نہین ہوتا تو (۱۰) سے یہہ مستنبط ہوتا ہے کہ

قیمتین لا = سہ اور ی = صہ کی $ر_۱$ کو فنا کرتی ہین تو وہ معادلات $\frac{ر_۱}{د_۱} = ۰$ اور $ر_۱ = ۰$

کی شرایط کو پورا کرتی ہین

دوم فرض کرو کہ صہ قیمت مساوات $\frac{ر}{د} = ۰$ کی نہین ہی اور $\frac{ر_۱}{د_۱} = ۰$ کی بہی نہین ہے

بلکہ وہ قیمت مساوات $\frac{ر_۲}{د_۲} = ۰$ کی ہی چونکہ $\frac{ر}{د}$ $\frac{ر_۱}{د_۱}$ جب ی = صہ کے ہو فنا نہین ہوتے

تو (۱۱) سی یہہ مستنبط ہوتا ہی کہ قیمتین لا = سہ اور ی = صہ کی $ر_۱$ کو معدوم کرتی ہین

اس سبب سی وہ معادلات $\frac{ر_۲}{د_۲} = ۰$ اور $ر_۱ = ۰$ کی شرایط کو پورا کرتی ہین

اب فرض کرو کہ صہ قیمت ان معادلات $\frac{ر}{د} = ۰$ اور $\frac{ر_۱}{د_۱} = ۰$ اور $\frac{ر_۲}{د_۲} = ۰$ مین سی کسی ایک کی

بہی نہین ہی بلکہ وہ مساوات $\frac{ر_۳}{د_۳} = ۰$ کی ایک قیمت ہی چونکہ $\frac{ر}{د}$ $\frac{ر_۱}{د_۱}$ $\frac{ر_۲}{د_۲}$ معدوم نہین ہوتے

جب کہ ی = صہ کے ہو تو (۱۲) سی یہہ مستنبط ہوتا ہی کہ

قیمتین لا = سہ اور ی = صہ معدوم $ر_۲$ کو کرتے ہین اور وہ معادلات $\frac{ر_۳}{د_۳} = ۰$

اور $ر_۲ = ۰$ کی شرایط کو پورا کرتے ہین

اسی دوسرا جز دعوی کا ثابت ہوتا ہی مساوات $\frac{ر}{د}$ $\frac{ر_۱}{د_۱}$ $\frac{ر_۲}{د_۲}$ $\frac{ر_۳}{د_۳} = ۰$

جسی تمام قیمتین ی کی جو داخل ہونے کی قابل ہین حاصل ہوتی ہین اسلئی اسکو آخری مساوات کہتی ہین

(۲۷۹) مثالین

(۱) $لا^۳ + ۳ی لا^۲ + (۳ی^۲ - ی + ۱) لا + ی^۳ - ی^۲ + ۲ی = ۰$

$لا^۲ + ۲ی لا + ی^۲ - ی = ۰$

یہان لا + ۲ی باقی اول ہی پس ر = ۱ اور $ی^۲ - ی$ دوسری باقی ہے

جو لا سی کچہ لگاؤ نہین رکہتی تو صرف وہی حل ہین جو $\frac{ر_۱}{د_۱} = ۰$ اور $ر_۱ = ۰$

یعنی جو ی^{2} - ی = ۰ اور لا + ۲ی = ۰ سی حاصل ہوتے ہین

(۲) لا^{3} + ۳ی لا^{2} + ۲ی (ی - ۲) لا + ی^{2} - ۴ = ۰

لا^{2} + ی لا + ۲ی^{2} - ۵ی + ۲ = ۰

یہان اول باقی (ی - ۲) (لا + ی + ۲) ہے پس ر = ی - ۲ اور
رَ = لا + ی + ۲ اور دوسری باقی ی^{2} - ۵ی + ۶ ہی اور اسکو کچھہ لگاؤ لا سی نہین ہے
پس تمام حل وہ ہین جو ب/ر = ۰ اور ب = ۰ یعنی ی - ۲ = ۰ اور لا^{2} + ۲ی لا + ۲ی^{2} - ۵ی + ۲ = ۰
سے انصرام پاتے ہین اور جو ب۱/ر۱ = ۰ اور رَ = ۰ یعنی ی^{2} - ۵ی + ۶ = ۰
اور لا + ی + ۲ = ۰ سے سرانجام پاتے ہین
اور اخری مساوات ی کی (ی - ۲) (ی^{2} - ۵ی + ۶) = ۰

(۳) لا^{3} + ۳ی لا^{2} - ۳لا^{2} + ۳ی^{2} لا - ۶ی لا - لا + ی^{3} - ۳ی^{2} - ی + ۳ = ۰

لا^{3} - ۳ی لا^{2} + ۳لا^{2} + ۳ی^{2} لا - ۶ی لا - لا - ی^{3} + ۳ی^{2} + ی - ۳ = ۰

باقی اول ۲ (ی - ۱) (۳لا^{2} + ی^{2} - ۲ی - ۳) ہی اور باقی دوم ۸ (ی^{2} - ۲ی) لا ہے
اور تیسری باقی ی^{2} - ۲ی - ۳ ہی پس تمام حل وہ ہین جو ان مساواتون سی انصرام پاتی ہین
ی - ۱ = ۰ اور لا^{3} - ۳ی لا^{2} + ۳لا^{2} + ۳ی^{2} لا - ۶ی لا - لا - ی^{3} + ۳ی^{2} + ی - ۳ = ۰
اور ی^{2} - ۲ی = ۰ سی اور ۳لا^{2} + ی^{2} - ۲ی - ۳ = ۰ سے
اور ی^{2} - ۲ی - ۳ = ۰ اور لا = ۰ سے
اور ی کی اخری مساوات یہہ ہی کہ (ی - ۱) (ی^{2} - ۲ی) (ی^{2} - ۲ی - ۳) = ۰

(۴) (ی - ۲) لا^{2} - ۲لا + ۵ی - ۲ = ۰

ی لا^{2} - ۵لا + ۴ی = ۰

اب ہم دائین طرف کی رکن کو اول جملہ کے ی مین ضرب دیتی ہین تاکہ تقسیم بغیر اشکال کسور
کے ممکن ہو پس س = ی اور باقی اول (۳ی - ۱۰) لا + ی^{2} + ۶ی اب عمل تقسیم کے

جاری رہنی کے واسطی ہم د لا۲ − ۵ لا + ۴ د کو ۳ د − ۱۰ امین ضرب دیتے ہین اور
اوسپر عمل ذیل کرتے ہین

(۳د − ۱۰) لا + د۲ + ۶د } (۳د − ۱۰) د لا۲ − (۳د − ۱۰) ۵ لا + (۳د − ۱۰) ۴د } د لا

(۳د − ۱۰) د لا۲ + (د۲ + ۶د) د لا

−(د۳ + ۶د۲ + ۱۵د − ۵۰) لا + ۱۲د۲ − ۴۰د

اب ہم کیا تو اس اخر سطر کی رقمون کو باقی شمار کرین یا اگے تقسیم جاری کرین کیونکہ اوسمین لا کا درجہ مقسوم علیہ سی کم نہین ہی اگر ہم دوسرے تجویز کو اختیار کرین تو ۳د − ۱۰ امین پہر ضرب دین تو اوسی وہی باقی حاصل ہوگی جو پہلی ہی اصل کو (۳د − ۱۰)۲ کے ضرب دینی سے حاصل ہوتی پس عمل کو اسطرح جاری کرین

−(د۳ + ۶د۲ + ۱۵د − ۵۰) (۳د − ۱۰) لا + (۱۲د۲ − ۴۰د) (۳د − ۱۰) } −(د۳ + ۶د۲ + ۱۵د −

−(د۳ + ۶د۲ + ۱۵د − ۵۰) (۳د − ۱۰) لا − (د۳ + ۶د۲ + ۱۵د − ۵۰) (د۲ + ۶د)

د۵ + ۱۲د۴ + ۸۷د۳ − ۲۰۰د۲ + ۱۰۰د

یہان ایک باقی لا سی بالکل بی تعلق ہی اور یہہ قیمت ر۱ کی ہی اور یہان د۱ = د پس حل وہ ہین جوان مساواتون سی انصرام پاتے ہین کہ

د۴ + ۱۲د۳ + ۸۷د۲ − ۲۰۰د + ۱۰۰ = ۰ اور (۳د − ۱۰) لا + د۲ + ۶د = ۰

(۲۷۸) دفعہ ۲۷۶ کی عمل کی نسبت ہم ان باتون کو کہہ سکتی ہین کہ

(۱) ہم ہمیشہ س اور ر کو ایسا فرض کرتی ہین کہ اونمین کوئی جز ضربی مشترک نہو کیونکہ اگر دونی عظم س اور ر کا ہو تو تقسیم د÷ا کی ل پر تعبیر امثال مکسور کے داخل ہونی کی ہو جائیگی جیسا کہ متطابقہ (۳) کسی ظاہر ہے پس س نہایت سادہ جز ضربی نہین جو مضروب فیہ ا کا پہلی ل پر تقسیم کرنی سی بنا ہی اسی معلوم ہو کہ نہایت سادہ جز ضربی فرض کرنی سی ہم د = ا کے بناتے ہین

اور علی ہذا القیاس س۱ اور س۲ ... ایسی ہین کہ س۱ اور ر۱ کا کوئی جز ضربی مشترک نہین ہے

اور س۲ اور ر۲ کا کوئی جز ضربی مشترک نہیں ہے

اسی معلوم ہوا کہ ہم تمام س و س۱ و س۲ و س۳ ۰۰۰ ایسا مقرر کر سکتی ہیں کہ د = ۱ اور د۱ دفق اعظم س۱ اور ر۱ کا ہو اور د۲ دفق اعظم س س۱ / د۱ اور ر۲ کا اور د۳ دفق اعظم س س۱ س۲ / د۱ د۲ اور ر۳ کا اور علی ہذا القیاس

دوم فرض کرو کہ جو لا سی بی لگاؤ باقی فرض کی گئی تھی وہ برابر صفر کی ہی تو ر۲ دفق مشترک ا اور ب کا ہوا اسی معلوم ہوا کہ حل معادلات ا = ۰ اور ب = ۰ کے

(۱) لا اور ی کے بی شمار قیمتوں پر جو مساوات واحد ر۲ = ۰ سی مستنبط ہوتی ہیں شامل ہیں (۲) معادلات ا / ر۲ = ۰ اور ب / ر۲ کے حل کرنی سی جو لا اور ی کے قیمتیں محدود حاصل ہوتی ہیں اون پر شامل ہیں لیکن اس سبب سی کہ ر۳ = ۰ تو (۱) کی متطابقوں سی بموجب دفعہ ۲۷۶ کے یہہ مستنبط ہوتا ہی کہ ر۲ تقسیم ر اور ر۱ پر ہوتے ہیں اب متطابقوں (۳) (۴) (۵) (۶) (۷) (۱۰) (۱۱) (۱۲) کو بموجب دفعہ ۲۷۶ کے ر۲ پر تقسیم کرو تو جدید متطابقی حاصل ہونگی جنمین ا و ب و ر و ر۱ اور ر۲ بجای ا / ر۲ و ب / ر۲ و ر / ر۲ و ر۱ / ر۲ و ر۲ / ر۲ کی رکھی گئی ہیں بوساطت ان متطابقوں کے ہم ثابت کر سکتی ہیں کہ تمام حل معادلات ا / ر۲ = ۰ اور ب / ر۲ = ۰ ان نظموں کے حل کرنی سی حاصل ہوتی ہیں کہ

ر / د = ۰ اور ب / ر۲ = ۰

ر۱ / د۱ = ۰ اور ر / ر۲ = ۰

ر۲ / د۲ = ۰ اور ر۱ / ر۲ = ۰

مثلاً فرض کرو کہ

لا۳ + ی لا۲ − (ی۲ + ۱) لا + ی − ی۳ = ۰

اور لا۳ − ی لا۲ − (ی۲ + ۶ی + ۹) لا + ی۳ + ۶ی۲ + ۹ی = ۰

تقسیم اولین سی باقی کی واسطی ۲ {ی لا۲ + (۳ی + ۴) لا − (ی۳ + ۳ی۲ + ۴ی)}

حاصل ہوتا ہے پس

ر = ی لا^۲ + (۳ی^۲ + ۴) لا - (ی^۳ + ۳ی^۲ + ۴ی)

اب تقسیم دوم کرنی کے واسطی مقسوم کو ی مین اور تقسیم کے اول مرحلہ کے بعد پہر ی مین ضرب دو تاکہ تقسیم جاری رہی باقی ر۱ ر۲ کے واسطی ۸ (ی^۲ + ۳ی + ۲) (لا - ی) حاصل ہوگا اب ر کو لا - ی پر تقسیم کرو تو خارج قسمت ی لا + ی^۲ + ۳ی + ۴ ہوگا اور اب کوئی باقی نہین ہے

پس معادلات مفروضہ کی حل (۱) مساوات واحد لا - ی = ۰ سی جو بی شمار قیمتین لا اور ی کی حاصل ہوتی ہین اون پر شامل ہین (۲) اور ان محدود حلون پر شامل ہین جو ان معادلات کی حل کرنے سے حاصل ہوتی ہین کہ

ی^۲ + ۳ی + ۲ = ۰ اور ی لا + ی^۳ + ۳ی + ۴ = ۰

سوم دفعہ ۲۷۶ کا ثبوت فرض کرتا ہی کہ لا اور ی محدود ہین مگر یہہ ممکن ہے کہ ایک مساوات کی حل بی شمار ہون مثلاً فرض کرو کہ (ی - ۱) لا^۲ - ۲ لا + ی^۲ = ۰ پس جب تک کہ ی برابر واحد کے نہ ہو تو اس مساوات درجہ دوم سی دو محدود قیمتین انصرام باقی ہین اگر ی نہایت قریب اکی ہوتا ہے تو ایک قیمت لا کی بی نہایت زیادہ ہوتی ہی بائیسوان باب جبر مقابلہ کا دیکہو

پس جب ی = ۱ تو ہم کہتے ہین کہ لا کی لا انتہا قیمتین ہین

ہم نی دفعہ ۲۷۶ کی تحقیقات مین ایسی لا اور ی کی غیر محدود قیمتین نہین فرض کی ہین اون پر علیحدہ بحث ہوسکتی ہی مثلاً اگر ہم یہہ تحقیق کرنا چاہین کہ لا کی ایک قیمت غیر محدود داخل ہونی کی قابل ہی تو ہم $\frac{1}{لا}$ بجای لا کی رکہین اور مساوات کو کسر سی خالص کرین اور فرض کرین کہ لا = ۰ تو اب ہم کو دو مساواتین ی کی حاصل ہونگیں اور اگر اونکی ایک قیمت یا کئی قیمتین مشترک ہونگین تو اس قیمت یا ان قیمتون کو مع غیر محدود قیمت لا کے معادلات مفروضہ کی شرائط کا پورا کرنی والا

تیئیسوان باب ایک جملہ کا سلسلہ مین پہیلانا

(۲۷۹) فرض کرو کہ ایک مساوات ایسی ہی کہ اوسمین دو مقادیر مجہول لا اور ی مخلوط ہین پس اگر ہم مساوات کو حل کر کی قیمتین ی کی لا کی رقمون مین دریافت کر سکین تو ی کی ایک قیمت کو سلسلہ قوا، لا مین معلوم کر سکینگی اور اب ہم ی کی قیمتون کی پھیلانی کی ایک ترکیب لکھتی ہین اور اسی پھیلی ی کی قیمتین محدود رقمون مین نہین دریافت کرینگی

اس ترکیب کو لاگرانش نی ایجاد کیا تھا نیوٹن صاحب کا جو متوازی الاضلاع مشہور ہے اوسمین بہی اس عمل کا بیان ہوا ہی جس کسی کو اس مسئلہ کا مفصل حال دریافت کرنا ہو کہ وہ کس طرح ایجاد ہوا اور کسنے ایجاد کیا تو وہ پروفیسر ڈی مورگن صاحب کی تحریر کو اس باب مین دیکھین

(۲۸۰) فرض کرو کہ مساوات

ا یٰ^سہ + ب یٰ^صہ + . . . + ک یٰ^کد + . . . + ص یٰ^قد = ۰

سے تعبیر ہوتی ہی اسمین ا ب . . . ک . . . ص تمام جملی لا کے ہین اور ہم فرض کرتی ہین کہ سہ و صہ . . . کد . . . بہ ترتیب تنازلی مقادیر جبریہ کی لکھی ہوئی ہین اور تمام تحقیقات جہان ہم نے بڑا یا بہت بڑا یا چھوٹا یا بہت چھوٹا مقادیر کو لکھا ہے وہان اونکی معنی جبریہ لئے ہین

فرض کرو کہ ا ا درجہ کا یعنی لاٰ اسی کوئی بڑی قوت لا کی ا مین نہین واقع ہوتی اور ب ب درجہ کا ہی . . ک ک درجہ کا اور . . ص ص درجہ کا

بالفعل ہمارا بڑا مطلب یہہ ہے کہ دفعہ ذیل کے مسئلہ کو حل کرین

(۲۸۱) مطلب ہمارا ہی کہ وہ سب طریقی دریافت کرین جسکی موافق قیمت ط کی ایسی دریافت کرنا کہ سلسلہ ارقام ذیل مین دو یا زیادہ رقمین برابر یا بڑی باقی رقمون مین سی کسی ایک رقم سی ہو

ا + سہ ط　ب + صہ ط . . . ک + کد ط . . . ص + قد ط

اول ط کو فرض کرو کہ + ص ہی تو اول رقم باقی ارقام مین سی ہر یک سی بڑی ہوگی اور جب ط گھٹتا ہے تو ہر یک رقم گھٹتی ہی لیکن ہر یک بہ نسبت اپنی ماقبل کے رقم زیادہ

آہستہ کم ہوتی ہی فرض کرو کہ ط کی وہ قیمت ہی کہ ا + سہ ط اول برابر ارقام مابعد مین سی ایک ما کی ایک کے برابر ہوا اور یہہ قیمت اسطرح حاصل ہوگی کہ معادلات ذیل مین سی ط کی سب سے بڑی قیمت دریافت کرین

ا + سہ ط = ب + صہ ط اور ا + سہ ط = س + لر ط ... ا + سہ ط = ک + کد ط ... ا + سہ ط = ص + قد ط

یعنی بڑی قیمت ط کی اس سلک ذیل سے دریافت ہوگی کہ

$$\frac{ب - ا}{سہ - صہ} ، \frac{س - ا}{سہ - لر} \ldots \frac{ک - ا}{سہ - کد} \ldots \frac{ص - ا}{سہ - قد}$$

فرض کرو کہ $\frac{ک - ا}{سہ - کد}$ ان قیمتون مین سب سی بڑی قیمت ہی اگر ایک قیمت بڑی دوسری سی ہے یا اگر کئی ایک برابر اور بڑی باقی مین سی بہ نسبت کسی کے ہو تو $\frac{ک - ا}{سہ - کد}$ کو اونمین اخر فرض کرو اور $\frac{ک - ا}{سہ - کد}$ کو مر سے تعبیر کرو

فرض کرو کہ ط کم مر سی ہوتا جاے یہانتک کہ ک + کد ط اول برابر ایک یا کئی ایک کے ارقام مابعد مین سی ہو ای قیمت ط کی موافق سابق کی معادلات ذیل مین ط کی سب سے بڑی قیمت لینی سے دریافت ہو سکتی ہے

ک + کد ط = ل + لر ط و ک + کد ط = م + لب ط ... ک + کد ط = ص + قد ط

یعنی سب سی بڑی قیمت اس سلک مین سی لینی چاہئی کہ

$$\frac{ل - ک}{کد - کر} ، \frac{م - ک}{کد - لب} \ldots \frac{ص - ک}{کد - قد}$$

فرض کرو کہ انمین سی سب سی بڑی قیمت منتخب کی جاے اگر ایک قیمت بڑی بہ نسبت کسی اور کی ہو یا کئی ایک بڑی بہ نسبت اوردن کی ہون تو انمین سی سب سے اخر رقم منتخب کیجائی فرض کرو کہ مر قیمت اس منتخب رقم کی ہی جو $\frac{ن - ک}{کد - قد}$ فرض کیجائی

فرض کرو کہ ط پھر کم مر سی ہوتی جاے اور موافق سابق کی عمل کر کی مر کو معادلات ذیل سی دریافت کرو

ن + سد ط = ع + بد ط ... ن + سد ط = ص + قد ط

یہی عمل جاری رہی جب تک کہ رقم ص + قد ط قیمت ط کی دریافت کرنے کیلئے کام آئی

بس اسی ہم دیکھتی ہین کہ ط کی تمام مناسب قیمتین دریافت ہو گئین

(۲۸۲) اب فرض کرو کہ ا = لاٗ (ا۱ + ا) اسمین ا۱ بے لگاؤ لاسی ہی اور ا جب لالانہایت ہو معدوم ہو جایگا اور اسیطرح فرض کرو کہ ب = لاٗ (ب۱ + ب۱) اور علی ہذا القیاس فرض کرو ی = لاٗ (لو + لو) اسمین لو بے لگاؤ لاسی ہی اور جب لالانہایت ہوتا ہی تو لو معدوم ہوتا ہی بس مساوات مفروضہ کو جسمین لا اور ی ملتف ہین یہہ قیمتین مندرج کرو تو

$$لا^{ا+سط}(ا_۱ + ا_۱)(لو + لو)^{س} + لا^{ب+صط}(ب_۱ + ب_۱)(لو + لو)^{ص} + \cdots$$

$$\cdots + لا^{ک+کط}(ک_۱ + ک_۱) + (لو+لو)^{کد} + لا^{ص+قط}(ص_۱ + ص_۱)(لو + لو)^{قد} = ۰$$

چونکہ یہہ مساوات لا کی سب قیمتون پر حاوی ہی اسلیئے وہ لا کی لانہایت قیمت پر بھی حاوی ہوگا اور یہہ صورت نہین واقع ہوتی کی اگر لا کی سب سی اعلی قوت صرف ایک رقم مین ہی واقع ہو اس مطلب کو یون بھی بیان کر سکتی ہین کہ مجموعہ امثال لا کی اعلی قوت کا معدوم ہو بس یہی بات ہی جسکی سبب سے تحقیقات دفعہ گذشتہ کا استعمال ہو سکتا ہے

بموجب فرض کی مر سب سی بڑی قیمت ط کی ہے جو داخل ہو سکتی ہی اور مساوات بالا کی دائین طرف جو جملہ کا حصہ ایسا لکھا ہی کہ جسمین لا کی اعلی قوت ملتف ہی یہہ ہے کہ

$$لا^{ا+سم}\left\{(ا_۱ + ا_۱)(لو + لو)^{س} + \cdots + (ک_۱ + ک_۱)(لو + لو)^{کد}\right\}$$

جب لا لانہایت ہو تو امثال $لا^{ا+سم}$ معدوم ہونے چاہیں اس بات سی یہہ مساوات ی کی قیمت دریافت کرنے کے واسطی حاصل ہوتی ہے کہ

$$ا_۱ لو^{س} + \cdots + ک_۱ لو^{کد} = ۰$$

اس مساوات سی لو کی قیمتیں دریافت ہونگین اور پھر لو کی قیمت کی موافق ی کی قیمت حاصل ہوگی جسمین رقم لا کی اعلی قوت رکھنی والی لو لاٗ ہوگی

اور اسی طرح سی مر پر قیاس کرکے مساوات ذیل لو کے تحقیق کرنی کے واسطی حاصل ہوگی کہ

$$ک_۱ لو^{کد} + \cdots + ن_۱ لو^{سد} = ۰$$

اس مسا ۱۰ ا سے سی قیمتین لو کی دریافت ہو سکتی ہین اور لو کی ہر قیمت کی موافق ی کی ہر ایک قیمت دریافت ہو گی

جسمین رقم اعلی قوت لا کی رکہنی والی لو لاٗ ہو گی

پس اسطرح عمل کرنے سی ہم ی کی ہر قیمت مین اعلی قوت لا کی دریافت کرتے ہین

اب پہر ط اور لو کی متناظر قیمتون کا ایک زوج مستحصلہ کام مین لاؤ اور

ی = لاٗ (لو + لی) اور ی کی اس قیمت کو اصل مساوات مین جسمین لا اور ی ملتق ہین

مندرج کرو تو اسطرح ایک مساوات حاصل ہو گی کہ جسمین لا اور لی اور مقادیر معلومہ متعلق ہونگین

اب وہ ترکیب کام مین لائین جسی کہ لو کی قیمتون مین لا کی اعلی قوتین دریافت ہون

پس اسطرح سی دوسری رقمین ی کی قیمتون کی صورت مفصلہ کی سلسلہ کی دریافت ہونگین

جسمین لا کی قوتون مین ترتیب تنازلی ہو گی اور اس عمل کو جہان چاہین جاری رکہین

(۲۸۳) ترکیب مذکورہ کا اقتضا یہہ نہین ہی کہ قوت سہ دصہ . . . قدوا وب . . . ص

اعداد صحاح ہون مگر اس کتاب مین جس قسم کی مساواتون کا ذکر ہی اونکی اول رقمون کی دریافت کرنی مین

جب اس ترکیب کا استعمال کرینگے تو وہ اعداد صحاح ہونگی

اب ہم اس ترکیب کا استعمال ایک مثال مین کرتے ہین

فرض کرو کہ یہہ مساوات ہو کہ

ی^۴ (لا^۳ − ۳ لا) + ی^۲ (لا^۳ + ۲ لا^۲) − ی (۴ لا^۵ + ۳) + ۳ لا^۶ = ۰

اب سلک ارقام (ب − ا)/(سہ − صہ) و (س − ا)/(سہ − لر) . . . کی اس صورت مین یہہ ہے کہ

(۳ − ۲)/(۴ − ۲) و (۵ − ۳)/(۴ − ۱) و (۶ − ۲)/(۴ − ۰) اب انمین سی دوسری اور تیسری رقم برابر ایک

کے ہی جو بہ نسبت ½ کی بڑہی ہی اور یہہ قیمت اول رقم کی ہی پس م = ۱ اسی معلوم ہوا کہ

ی = لا (لو + لی) رکہو اور اسکو مساوات مفروضہ مین رکہو تو سب سے اعلی قوت لا کی لاٗ ہے

اور رقم جسمین وہ ملتق ہے یہہ ہے کہ

لا^۶ [(لو + لی)^۴ − ۴ (لو + لی) + ۳]

پس جب لا لانہایت ہو تو یہہ مثال معدوم ہونی چاہئی اور اسی یہہ حاصل ہوتا ہے

لو^۴ - ۴ لو + ۳ = ۰

اب یہہ ظاہر ہی کہ لو = ۱ ایک حل ہی اور جملہ مشتقہ ۴ لو^۳ - ۴ بہی معدوم ہوتا ہے جب لو = ۱
تو قیمت ایک انی ہے

لو^۴ - ۴ لو + ۳ کو (لو - ۱)^۲ پر تقسیم کرو تو خارج قسمت لو^۲ + ۲ لو + ۳ حاصل ہوگا
پس اور قیمتین لو کی مساوات لو^۲ + ۲ لو + ۳ = ۰ سے حاصل ہونگین اور وہ
-۱ ± √-۲ ہین پس اب یہہ نتیجہ نکالتی ہین کہ مساوات مفروضہ سی دو حقیقی قیمتین ء کی
ارقام ہین حاصل ہونگین اور لا اول رقم ان قیمتون ہین سی ہر ایک قیمت مین اوس وقت ہوگی
کہ وہ لا کی قوای متنازلہ کے سلسلہ مین بیان کیجای

اب ہم لا (۱ + لو) کو ء کی جگہ مساوات مفروضہ مین رکہو اور لو کی قیمتون کو دریافت کرو
بالفعل اسی مثال کو دوبارہ فرض کرینگے

(۲۸۴) دفعات ۲۸۱ اور ۲۸۲ مین نتایج ذیل حاصل ہوتے ہین

(۱) اگر ا + سہ د ب + صہ . . . ک + کد ص + قد سب برابر ہون
تو مقادیر مر د مرَ د مرً . . . سب برابر واحد کے ہونگے

(۲) اگر مقادیر ا + سہ و ب + صہ . . . ک + کد . . . ص + قد
مین سی دو یا زیادہ برابر ہون اور بڑی بہ نسبت کل باقی ارقام کی ہون تو واحد سلک
مر مرَ و مرً . . . مین واقع ہوگا اسواسطی ظاہر ہی کہ ط = ۱ ایک مناسب قیمت
تحقیقات ۲۸۱ مین ہی کیونکہ یہہ قیمت دو یا زیادہ ارقام کو برابر اور بڑی بہ نسبت
باقی ارقام کے بناتی ہے

جبریہ خطوط منحنی کی خطوط مستقیمہ ممتنع الملاقات کا ضابطہ ان دو نتایج مین ملتف ہے
باقی اس دفعہ مین ہم سہ و صہ و لہ . . . سب کو صحاح فرض کرتی ہین اور ر کو صفر

(۳) دفعہ ۲۸۲ مین اول مساوات لو کی سہ - کد قیمتین رکہتی ہی اور دوسری مساوات کی کد - سد قیمتین اور علی ہذا لقیاس مین الحاصل ہم کو یہہ قیمتین د کی اول رقم کی دریافت ہوتی ہین اور یہی ہونا چاہئی تہا اسلئی کہ مساوات د کی سہ درجہ کی ہی

(۴) فرض کرو کہ تمام جملی لا کی ک سی ل تک برابر ہین اور اعلی درجہ کی بہ نسبت اورون کی ہین تو د کی قیمتون مین سے سہ - کد قیمتین ہونگین جو لا کی مثبت قوت سی شروع ہوتی ہین اور کد - سد قیمتین ہونگین جو صفر قوت سی لا کی شروع ہوتی ہین اور سد قیمتین جو لا منفی قیمتون سی شروع ہوتی ہین اسواسطی کہ کد - سد قیمتین د کی ہین جو لا کی صفر قوت سی شروع ہوکر صعود کرتی ہین اس سبب سے کہ بموجب فرض کی قیمت ط = ۰ تمام ارقام ذیل

کد + کدط دل + لرط ۰۰۰ ن + سدط کو برابر اور بڑا کسی قسم سی جو اونکی اگی اتی بناتی ہی سہ - کد قیمتین د کی جو لا کی مثبت قیمتون سی شروع ہوکر صعود کرتی ہین اور اس صعود کا سبب مثبت قیمتین ط کی اور اونکی موافق قیمتین لو کی ہین جو قوت نمایون سہ وصہ ۰ ۰ ۰ کد کے تعلق سی حاصل ہوتی ہین اور سد قیمتین د کی لا کی منفی قوتون سے شروع ہوتی ہی اور صعود کرتی ہین اور یہہ صعود ط کی منفی قیمتون سی اور اونکی موافق لو کی قیمتون سی جو قوت نمایون سد ۰ ۰ ۰ قد سی حاصل ہوتی ہین ہوتا ہے اور اسمین قد = ۰

(۵) ا ب ۰ ۰ ۰ ص تمام متحد الدرجہ ہین اور م اعلی درجہ بہ نسبت باالبقی کے رکہتا ہی سہ - لب قیمتین د کی ہین جن مین اعلی قوت لا کی مثبت قوت نما $\frac{\text{م} - \text{ا}}{\text{سہ} - \text{لب}}$ ہی اور د کی لب قیمتین ہین جن مین اعلی قوت لا کا منفی قوت نما - $\frac{\text{م} - \text{ا}}{\text{لب}}$ ہے

(۲۸۵) دفعہ ۲۸۲ مین جب مساوات لو کی حاصل ہوتی ہی اور اوسی د کی قیمتون کے دوسرے رقم کی دریافت کرتی ہین اوسپر ایک بات ہم کہتی ہین فرض کرو کہ د = لاٹ (لو + لی) اسمین لو اور ط معلوم ہین اس د کی قیمت کو مساوات مفروضہ مین مندرج کرو اسطرح مساوات مفروضہ کے درجہ کی مساوات حاصل ہوگی اگر د کی قیمتون مین بعض داخل ہونی کی قابل ہونگین اسواسطی کہ جب فرض کے لو معدوم ہوتا ہی جب لا لانہایت ہو

پس وہ قیمتین ی کی جو لا کی مثبت قوت سی شروع ہوتی ہین یا لا کی صفر قوت سے اونکو مسترد کرنا چاہئی یہہ لو کی مسترد قیمتین ی کی اور قیمتون سی متعلق ہونگین جنسے کہ بالفعل ہم کو کچہ تعلق نہین ہی کیونکہ اسوقت صرف ہم یا تو وہ خاص قیمت ی کی تلاش کر رہی ہین جو لو لا سی شروع ہوتی ہی یا خاص ان قیمتون ی کی تلاش کر رہی ہین جو اسطرح شروع ہوتی ہین

اور ایک سی زیادہ ہین اور جنمین یوا ور ط کی معلوم قیمتین ہین

(۲۸۶) دفعہ ۲۸۲ کی مثال کو دوبارہ لو ی کی جگہ لا (لو + لو) اور لو = ۱ کے فرض کرو تو لا پر تقسیم کرنے کے بعد یہہ نتیجہ حاصل ہوگا

لو^۴ (لا^۵ ...) + لو^۳ (۴ لا^۵ ...) + لو^۲ (۶ لا^۵ ...) - لو (۱۰ لا^۴ ...) - ۲ لا^۴ ... = ۰

یہان لو کی مثال مین اعلی قوتین لا کی بیان کردین اب دفعہ ۲۸۲ کی کسور سے یہہ حاصل ہوتا ہے،

$\frac{5-5}{4-3}$ ، $\frac{5-5}{4-2}$ ، $\frac{5-4}{4-1}$ ، $\frac{5-4}{4-0}$

یہان اول دو قیمتین صفر ہین اور جبر مقابلہ کی اعتبار سی بڑی بہ نسبت اورون کے ہین لیکن صفر قیمت مسترد ہونی چاہئی جسکا بیان دفعہ بالا مین کیا گیا اسیواسطی دفعہ ۲۸۱ کی طرح پہر ہم عمل کرین اور فرض کرین کہ مر = ۰ اب ہم کو مر ٗ دریافت کرنا ہی اسواسطی یہہ کسرین بنائی جائینگی

$\frac{5-4}{1-2}$ ، $\frac{5-4}{0-2}$

انمین سی دوسری $-\frac{1}{2}$ ہی اور جبر مقابلہ کے لحاظ سی بڑی ہی پس اسکے موافق ہم لو = لو لا^{-½} اور مساوات ۶ لو^۲ - ۲ = ۰ سی قیمت لو کی دریافت کرتی ہین پس لو = $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

پس اول رقم لو کی $\frac{1}{\sqrt{3}\,\sqrt{لا}}$ یا $-\frac{1}{\sqrt{3}\,\sqrt{لا}}$ ہے اسیواسطی جہانتک ہم نی عمل کیا ہے

ی = لا (۱ + $\frac{1}{\sqrt{3}\,\sqrt{لا}}$ + ...) یا ی = لا (۱ - $\frac{1}{\sqrt{3}\,\sqrt{لا}}$ + ...)

(۲۸۷) لو کی قیمتون کی صفت مساوات عامہ لو کی بناوٹ کی امتحان سی معلوم ہو سکتی ہے اول فرض کرو کہ بجای ی کی لا لو رکہین اور پہر لو کو لو + لو سی تبدیل کرین جب ہم ی کی جگہ لا لو

رکھین تو دائین طرف کا رکن مساوات یہہ حاصل ہوگا کہ

$$ص_۱ (لو)\ لا^{ن_۱} + ص_۲ (لو)\ لا^{ن_۲} + ص_۳ (لو)\ لا^{ن_۳} + \cdots$$

اسمین $ن_۱$ و $ن_۲$ و $ن_۳$ ... مقدار کی لحاظ سی بہ ترتیب تنازلی ہین اس جملہ کو سر (لو) سی تعبیر کرو
تو مساوات لو کی یہہ ہوگی کہ سر (لو + لو) = ۰ مساوات مفروضہ مین ء کی قوت نما مثبت
فرض کئی ہین مساوات لو مین اسطرح لکھی جائیگی کہ

$$سر_{سہ}\ لو^{سہ} + سر_{سہ-۱}\ لو^{سہ-۱} + سر_{سہ-۲}\ لو^{سہ-۲} + \cdots + سر_۱\ لو + سر = ۰$$

اسمین $سر_{سہ}$ کو بجای $\frac{۱}{سہ}$ سر (لو) کے رکھا ہی اور اسی طرح کے معنی $سر_{سہ-۱}$ و $سر_{سہ-۲}$
کے ہین اب اگر کوئی خاص قیمت لو کی نہ مقرر کیجای تو ہشال اکثر نواز لو کے اوپر
کی مساوات مین جملی لا کی ہونگی اور سب ایک درجہ کی ہین یعنی $ن_۱$ درجی کے پس بموجب
دفعہ ۲۸۴ کی لو کی قیمتین لا کی صفر قوت سی شروع ہونگین لیکن اگر لو ایسا ہو کہ
$ص_۱ (لو) = ۰$ تو جملہ سر کا ادنی درجہ کا بہ نسبت جملہ سر کے ہوگا مگر اسی معلوم ہوا کہ لو کی قیمتون
سی ایک قیمت لا کی منفی قوت سی شروع ہوتی یعنی $لا^{-(ن_۱ - ن_۲)}$ اور یہی قیمت لو کی ہی جسکی
ہم تلاش کر رہی تھی چونکہ $ص_۱ (لو) = ۰$ مساوات ہی جسسی لو کی قیمت موافق اپنی عمل کے ہم
دریافت کرینگی لیکن اگر مساوات $ص_۱ (لو) = ۰$ کی قیمتین برابر ہون تو لو کی ایک سی زیادہ
مناسب قیمتین ہم کو حاصل ہونگین مثلاً فرض کرو کہ خاص قیمتین جو ہم نی منتخب کی تھی وہ چار دفعہ
واقع ہوتی ہی تو لا کی $ن_۱$ درجہ کا $سر_۴$ ہوگا اور $ن_۲$ درجہ کی $سر_۳$ و $سر_۲$ و $سر_۱$ و سر ہونگے
اسی بموجب دفعہ ۲۸۴ کے معلوم ہوتا ہی کہ لو کی چار مناسب قیمتین ہونگین ہر یک لا سی شروع
ہوگی جسمین لا کا صعود منفی قوت $-\frac{۱}{۴}(ن_۱ - ن_۲)$ سے شروع ہوگا

ہم نی یہان یہہ فرض کیا ہی کہ $ص_۲ (لو)$ اور اوسکی مشتقہ جملی کی اون قیمتون سی جسپر بحث ہو رہی ہے
معدوم نہین ہوا

(۲۸۸) جو کچھہ ہم نی اوپر لکھا ہی اوسمین یہہ تحقیق کیا ہی کہ ء کی قیمتین لا کی قوا متنازلہ مین بیان ہوتی ہین

پس اگر ہم اپنی نتایج کو علم ہندسہ کی موافق بیان کرین اور خطوط منحنی جو کی اون قیمتوں کی موافق کہ قواعد لا مین بیان ہوئی ہین مرتسم کرین تو اول رقم اوس سلسلہ کی جو قیمت ء کی واسطی ہم نی دریافت کی ہی اوسی صفت ذاتی خط منحنی کی مبدء سی بہت فاصلہ پر معلوم ہوگی لیکن یہہ ترکیب اسطرح بھی استعمال مین اسکتی ہی کہ قیمتین ء کی موافق قواعد متصاعد کے دریافت کرین تو قیمت ء کی اول رقم صفت ذاتی خط منحنی کی جو مبدء سی بہت قریب ہی بتلاینگی تاکہ ء کی قیمتین قواعد متصاعدہ لا مین دریافت کرنی کی ترکیب کو استعمال مین لاسکین یہہ تبدلات ہم کو کرنی چاہئی کہ اول سہ و صہ . . . قد کو بہ ترتیب تصاعدی بلحاظ مقادیر جبریہ کی لکھو اور ا معدوم ہوگا جب لا معدوم ہوگا وہ لا کی لانہایت ہونی سی معدوم نہین ہوگا پس لا سب سی ادنی درجہ قوت کی ا مین ہو تو موافق سابق کی وہ سب سے اعلی قوت نہین ہوگی اور اسی کی متماثل تبدل ب اور ب مین اور باقی او متشابہ مقادیر مین کرو

پس ط جب + صہ ہی تو مقادیر ذیل

ا + سہ ط و ب + صہ ط . . ک + کد ط . . . ص + قد ط

مین ترتیب تصاعدی بلحاظ مقدار کے ہوگی

موافق سابق کی سب سے بڑی قیمت ط کی ان مساواتون سی دریافت کرو کہ

ا + سہ ط = ب + صہ ط و ا + سہ ط = س + لر ط . . . ا + سہ ط = ک + کد ط . . . ا + سہ ط = ص + قد ط

چوبیسوان باب مسائل متفرقہ

(۲۸۹) اس باب مین معادلات کی مسائل متفرقہ نہایت دلچسپ اور بہت بکار آمد لکھینگے اونسی اوپر کے صفحون مین جو اصول لکھی ہین اونکی توضیح اور تشریح خوب ہوگی گویا یہہ مسائل اون اصول کی مثالین ہین

ثابت کرو کہ مساوات

$$\frac{ا^2}{لا - اَ} + \frac{ب^2}{لا - بَ} + \frac{س^2}{لا - سَ} + \dots + \frac{ک^2}{لا - کَ} - لر = ۰$$

کی کوئی خیالی قیمت نہین ہوتی اگر یہہ ممکن ہو تو فرض کرو کہ ع + ق $\sqrt{-1}$ ایک قیمت ہی تو ع - ق $\sqrt{-1}$ بہی دوسری قیمت ہوگی اب ان قیمتون کو متواتر مساوات بجای لا کے لکہو اور ماحصل ابہمین تفریق کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$ق \left[\frac{ا^2}{(ع - ا)^2 + ق^2} + \frac{ب^2}{(ع - ب)^2 + ق^2} + \frac{س^2}{(ع - س)^2 + ق^2} + \cdots + \frac{ک^2}{(ع - ک)^2 + ق^2} \right] = ۰$$

اور یہہ ناممکن ہی اگر ق = ۰ کے نہ ہو

یا اس مسئلہ کو اسطرح ثابت کرو کہ مساوات مفروضہ کی دائیں طرف کی رکن کو مح (لا) سی تعبیر کرو اور فرض کرو کہ ا ، ب ، س ۰ ۰ ک مقادیر جزیہ بہ ترتیب تصاعیدی ہین جب لا کچہہ ہی بڑا بہ نسبت ا کے ہو تو مح (لا) کی اول رقم بہت بڑی ہوگی اور مثبت ہوگی اور لا کی ا کی ساتہہ قربت کافیہ فرض کرکی ہم مح (لا) کی مثبت قیمت قطعی حاصل کر سکتی ہین اور جب لا کچہہ ہی کم ب سی ہو تو دوسری رقم مح (لا) کی بہت بڑی ہوگی اور منفی ہوگی اور لا کی ب کے ساتہہ قربت کافیہ فرض کرکی ہم مح (لا) کی منفی قیمت حاصل کر سکتی ہین پس لا کی ا اور ب کے درمیان بعض قیمت کے مقرر کرنی سی مح (لا) علامت بدلتا ہی اور اسیطرح ب اور س کے درمیان لا کی بعض قیمت سے مح (لا) کی علامت بدلتی ہے اور علی ہذا القیاس اسطرح ہم ثابت کر سکتی ہین کہ مساوات مح (لا) = ۰ کی سب قیمتین حقیقی اور غیر متساوی ہین مساوات مح (لا) = ۰ کی جو صورت ہی اوسی بہت آسان مساوات کی خاصیت جسکا اوپر بیان ہوا آسانی سی ثابت ہو سکتی ہی ظاہر ہی کہ اگر مساوات کو کسور سی خالص کر کے اصلی گینڈی کی صورت میں مساوات کو بدل لیت تو کچہہ ہماری نتیجہ نکالنی پر اثر نہین ہوگا یعنی اگر بجای مساوات مح (لا) = ۰ کی یہہ مساوات بنالین کہ

$$مح (لا) (لا - ا) (لا - ب) (لا - س) \cdots (لا - ک) = ۰$$

تو کچہہ نتیجہ مین فرق نہین آئیگا اور ثبوت ظاہر ہو جائیگا

(۲۹۰) ان مقادیر لا۱ و لا۲ و لا۳ ۰ ۰ ۰ لا ن کی قیمتین ان ن مساواتون سی دریافت کرو

$$\text{لا}_1 + \text{لا}_2 + \text{لا}_3 + \cdots + \text{لا}_\text{ن} = 0$$

$$\text{ا}_1\text{لا}_1 + \text{ا}_2\text{لا}_2 + \text{ا}_3\text{لا}_3 + \cdots + \text{ا}_\text{ن}\text{لا}_\text{ن} = 0$$

$$\text{ا}_1^2\text{لا}_1 + \text{ا}_2^2\text{لا}_2 + \text{ا}_3^2\text{لا}_3 + \cdots \text{ا}_\text{ن}^2\text{لا}_\text{ن} = 0$$

$$\text{ا}_1^{\text{ن}-2}\text{لا}_1 + \text{ا}_2^{\text{ن}-2}\text{لا}_2 + \text{ا}_3^{\text{ن}-2}\text{لا}_3 + \text{ا}_\text{ن}^{\text{ن}-2}\text{لا}_\text{ن} = 0$$

$$\text{ا}_1^{\text{ن}-1}\text{لا}_1 + \text{ا}_2^{\text{ن}-1}\text{لا}_2 + \text{ا}_3^{\text{ن}-1}\text{لا}_3 + \cdots + \text{ا}_\text{ن}^{\text{ن}-1}\text{لا}_\text{ن} = \text{ب}$$

ان مساواتون جداگانہ س ن-۱ و س ن-۲ ۰۰۰ و س۲ و س۱ وا مین ضرب دو اور
اور بالفعل س ن-۱ و س ن-۲ و ۰۰ س۲ و س۱ غیر معین ہین اور جو ما حصل ہون اونکو
جمع کرو اور یہہ فرض کرو کہ س ن-۱ و س ن-۲ ۰۰ س۲ و س۱ ایسی ہین کہ
لا۲ و لا۳ ۰۰ لان کے امثال کو معدوم کرتے ہین تو

$$\text{لا}_1\left(\text{ا}_1^{\text{ن}-1} + \text{س}_1\text{ا}_1^{\text{ن}-2} + \text{س}_2\text{ا}_1^{\text{ن}-3} + \cdots + \text{س}_{\text{ن}-2}\text{ا}_1 + \text{س}_{\text{ن}-1}\right) = \text{ب}$$

س ن-۱ و س ن-۲ ۰۰ س۲ و س۱ کے باب مین جو فرض کیا ہی اوسی یہہ استخراج ہوتا ہے
کہ ا۲ و ا۳ ۰۰۰ ان قیمتین مساوات

$$\text{ی}^{\text{ن}-1} + \text{س}_1\text{ی}^{\text{ن}-2} + \text{س}_2\text{ی}^{\text{ن}-3} + \cdots + \text{س}_{\text{ن}-2}\text{ی} + \text{س}_{\text{ن}-1} = 0 \quad (۱۲+۷۱)$$

کی ہین اسیواسطے دائین طرف مساوات کی ازروی تطابق برابر

$$(\text{ی}-\text{ا}_2)(\text{ی}-\text{ا}_3)\cdots(\text{ی}-\text{ا}_\text{ن})$$

اسی معلوم ہوا کہ ا۱ کو بجای ی کی مساوات مین رکہین جسی لا۱ معین ہو تو
لا۱ اس صورت مین نمایان ہوگا کہ

$$\text{لا}_1(\text{ا}_1-\text{ا}_2)(\text{ا}_1-\text{ا}_3)\cdots(\text{ا}_1-\text{ا}_\text{ن}) = \text{ب}$$

پس لا۱ معلوم ہوگیا اور لا۲ و لا۳ ۰ ۰ لان کو قرینہ سی دریافت کرسکتے ہین

(۲۹۱) ن مقادیر لا و د و ی ۰۰ ۰ ان ن مساواتون سے دریافت کرو

$$\frac{\text{لا}}{\text{ک}_1-\text{ا}} + \frac{\text{د}}{\text{ک}_1-\text{ب}} + \frac{\text{ی}}{\text{ک}_1-\text{س}} + \cdots = 1$$

$$\frac{لا}{ک_۲ - ۱} + \frac{د}{ک_۲ - ب} + \frac{ی}{ک_۲ - س} + \dots = ۱$$

$$\frac{لا}{ک_ن - ۱} + \frac{د}{ک_ن - ب} + \frac{ی}{ک_ن - س} + \dots = ۱$$

ن مقادیر $ک_۱$ و $ک_۲$ . . . $ک_ن$ کو اس مساوات واحد

$$\frac{لا}{ک - ۱} + \frac{د}{ک - ب} + \frac{ی}{ک - س} \dots = ۱$$

کی قیمتیں خیال کرسکتے ہین اور یہہ مساوات بلحاظ ک کے ن درجہ کی ہی فرض کرو کہ ک = ۱ - ط
تو اسی یہہ استخراج ہوگا کہ ط مین جو مساوات ذیل بیان ہوئی ہی اوسکی قیمتیں
$۱ - ک_۱$ و $۱ - ک_۲$ و $۱ - ک_۳$ . . . ہین

$$۱ + \frac{لا}{ط} + \frac{د}{ط + ب - ۱} + \frac{ی}{ط + س - ۱} + \dots = ۰$$

نسب نمایون کی حاصل ضرب مین مساوات کو ضرب دیکر اوسکی یہہ صورت بناؤ کہ

$$ط^ن + ا_۱ ط^{ن-۱} + ا_۲ ط^{ن-۲} + \dots + ا_ن = ۰$$

اسمین رقم جو ط سی بی تعلق ہی یعنی $ا_ن$ وہ لا (ب - ۱) (س - ۱) . . ہے
اسیواسطی بموجب دفعہ ۴۵ کے

$$(۱ - ک_۱)(۱ - ک_۲)(۱ - ک_۳) \dots = (-۱)^ن لا (ب - ۱)(س - ۱) \dots$$

یعنی $$لا = \frac{(۱ - ک_۱)(۱ - ک_۲)(۱ - ک_۳) \dots}{(۱ - ب)(۱ - س) \dots}$$

اس جملی سی قیمتین د اور ی . . کی حروف ا و ب و س . . کی قرینہ کے ساتھہ
تبدل کرکے نکل سکتی ہین

(۲۹۲) ن مقادیر س و $س^۲$ و $س^۳$ . . $س^ن$ مین م مقادیر کو ایک ایک دفعہ لیکر ضرب دین تو
ان حواصل ضرب کا مجموعہ ثابت کرو کہ یہہ ہے کہ

$$\frac{(س^ن - ۱)(س^{ن-۱} - ۱) \dots (س^{ن-م+۱} - ۱)}{(س - ۱)(س^۲ - ۱) \dots (س^م - ۱)} س^{\frac{م(م+۱)}{۲}}$$

فرض کرو کہ

$$(لا + س)(لا + س^۲) \dots (لا + س^ن) = لا^ن + ع_۱ لا^{ن-۱} + \dots + ع_{ن-۱} لا + ع_ن \dots (۱)$$

پس بموجب دفعہ ۴۵ کے قیمت ع م کی ہم کو دریافت کرنی ہے (۱) مین

لا کو $\frac{لا}{س}$ سے بدل دو اور $س^{ن}$ مین ضرب دو تو

$$(لا+س^{۲})(لا+س^{۳})\cdots(لا+س^{ن+۱}) = لا^{ن} + ع_{۱}\, س\, لا^{ن-۱} + \cdots + ع_{ن-۱}\, س^{ن-۱}\, لا + ع_{ن}\, س^{ن} \cdots$$

(۱) اور (۲) سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$(لا+س^{ن+۱})(لا^{ن} + ع_{۱}\, لا^{ن-۱} + \cdots + ع_{ن-۱}\, لا + ع_{ن}) =$$

$$(لا+س)(لا^{ن} + ع_{۱}\, س\, لا^{ن-۱} + \cdots + ع_{ن-۱}\, س^{ن-۱}\, لا + ع_{ن}\, س^{ن})$$

اس مطابقہ کی دونو رکنون مین امثال $لا^{ن-م+۱}$ کو ا٘پسمین برابر لکھو تو

$$ع_{م} + س^{ن+۱}\, ع_{م-۱} = ع_{م}\, س^{م} + ع_{م-۱}\, س^{م}$$

اسیواسطے
$$ع_{م} = ع_{م-۱}\, \frac{س^{م}(س^{ن-م+۱} - ۱)}{س^{م} - ۱} \cdots (۳)$$

اور $ع_{۱} = س + س^{۲} + \cdots + س^{ن} = \frac{س(س^{ن} - ۱)}{س - ۱}$ تو بوساطت (۳) کے

ہم $ع_{۲}$ اور $ع_{۳}$ و $ع_{۴}$ ... کو تو معین کرسکتے ہین اور اسی ہم کو قیمت مطلوب $ع_{م}$ کے

حاصل ہوجائیگی

(۲۹۳) فرض کرو کہ ا و ب و س ... ن مقادیر ہین اور $ص_{ن}$ اونکا مجموعہ ہے

$ص_{ن-۱}$ مجموعہ اونمین ن-۱ مقادیر کا ہی اور علی ہذا القیاس اور فرض کرو کہ صح

$$(ص_{ن})^{ر} - ح(ص_{ن-۱})^{ر} + ح(ص_{ن-۲})^{ر} - \cdots + (-۱)^{ن-۱}\, ح(ص_{۱})^{ر}$$

تعبیر کرتا ہی یہان $ح(ص_{م})^{ر}$ مجموعہ ایسی ارقام کو تعبیر کرتا ہی جیسی کہ $(ص_{م})^{ر}$ رقم جون مقادیر

ا و ب و س ... مین سی م مقادیر کے ممکن انتخابات سی بنتی ہی تو اب ہم یہہ ثابت

کرینگے کہ اگر ر چھوٹا ن سی ہو تو صح = ۰ اور اگر ر برابر یا بڑا بنسبت ن کی ہی تو صح پورا

ا ب س ... پر تقسیم ہوگا اور خاص کر

$$صح = لن\ ا\, ب\, س \cdots \quad جب\ ر = ن$$

اور
$$صح = \frac{لن+۱}{۲}(ا+ب+س+\cdots)\, ا\, ب\, س \cdots \quad جب\ ر = ن+۱$$

ہم صح کو دو حصوں مین جدا جدا کرتی ہین ایک وہ جسکی ہر رقم مین ا واقع ہوتا ہے اور دوسرا وہ حصہ ہی جسمین ا نہین واقع ہوتا تو ہم پہلی حصہ کو اسطرح لکہ سکتی ہین کہ

$$(\text{ص}_{\text{ن}})^{\text{ر}} - \text{ح}_{۱}(\text{ص}_{\text{ن}-۱})^{\text{ر}} + \text{ح}_{۱}(\text{ص}_{\text{ن}-۲})^{\text{ر}} - \cdots + (-۱)^{\text{ن}-۱}\text{ا}^{\text{ر}}$$

اور دوسرے حصہ کو

$$-\text{ح}_{۲}(\text{ص}_{\text{ن}-۱})^{\text{ر}} + \text{ح}_{۲}(\text{ص}_{\text{ن}-۲})^{\text{ر}} - \cdots + (-۱)^{\text{ن}-۱}\text{ح}_{۲}(\text{ص}_{۱})^{\text{ر}}$$

اسمین ح۲ سی وہ خاص مقادیر تعبیر ہوتی ہین جو پہلی ح کی ماتحت تہین اور ح۲ سے باقی ارقام تعبیر ہوتی ہین اب فرض کرو کہ ا = ۰ تو صح معدوم ہوتا ہی کیونکہ اس صورت مین

$$(\text{ص}_{\text{ن}})^{\text{ر}} - \text{ح}_{۲}(\text{ص}_{\text{ن}-۱})^{\text{ر}} = ۰$$

$$\text{ح}_{۱}(\text{ص}_{\text{ن}-۱})^{\text{ر}} - \text{ح}_{۲}(\text{ص}_{\text{ن}-۲})^{\text{ر}} = ۰$$

$$\text{ح}_{۱}(\text{ص}_{\text{ن}-۱})^{\text{ر}} - \text{ح}_{۲}(\text{ص}_{\text{ن}-۲})^{\text{ر}} = ۰$$

اور اسیطرح ہم ثابت کر سکتی کہ جب ب = ۰ اور س = ۰ کے تو صح معدوم ہوتا ہی اور علی ہذا القیاس پس ہم یہہ نتیجہ نکالتی ہین کہ صح اکثر مقادیر ا و ب و س ۰۰ مین سے ہر یک پر تقسیم ہوتا ہی اور اسیواسطی اونکی حاصل ضرب پر لیکن حاصل ضرب ن درجی کا ہے اور اسیواسطی اگر صح ن درجی سی کم ہو تو وہ ازروی تطابق کی صفر ہوگا اور صح ر درجی کا ہے تو اسی یہہ مستنبط ہوتا ہی کہ جب ر کم بہ نسبت ن درجی کی ہو تو صح معدوم ہوتا ہے اور جب ر کم ن سے نہ ہو تو وہ پورا ا ب س ۰۰ پر تقسیم ہوتا ہے جب ر = ن تو صح = ل ا ب س ۰۰ کی حاصل ہوگا اسمین ل کوئی عددی مقدار ہے اسکو تشخیص کرنا چاہیئی اب ل کے تشخیص کرنی کی واسطی فرض کرو کہ ا و ب و س ۰۰۰ مین ہر یک برابر واحد کے ہے تو صح یہہ ہو جایگا کہ

$$\text{ن}^{\text{ن}} - \text{ن}(\text{ن}-۱)^{\text{ن}} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۱\times۲}(\text{ن}-۲)^{\text{ن}} - \cdots$$

یعنی لن بموجب جبر مقابلہ کے انتالیسوین باب کے

دوم فرض کرو کہ ر = ن + ۱ تو صح پورا اب س . . پر تقسیم ہوگا اور چونکہ صح ن + ۱ درجی کا ہی تو اوسکا ایک جز ضربی ایک درجہ کا ہو جو بلحاظ ا و ب و س . . . ایک قرینہ رکہتا ہوگا اسواسطی یہہ جز ضربی ا + ب + س . ہوگا اسی معلوم ہوا کہ صح = لب اب س . . . (ا + ب + س) + . . اسمین لب کوی عددی مقدار ہی اوسکا تشخیص کرنا چاہئی لب کی تشخیص کرنی کی واسطی فرض کرو کہ ا و ب و س . . وغیرہ مین ہریک برابر واحد کے ہے تو

$$صح = ت ن^{ن+۱} - (ن - ۱)^{ن+۱} + \frac{ن(ن-۱)}{۱ \times ۲} (ن - ۲)^{ن+۱} - . .$$

اور یہہ برابر لب ن کے اسی معلوم ہوا کہ موافق باب ۳۹ باب جبر مقابلہ کے لب = $\frac{ن(ن+۱)}{۲}$

(۲۹۴) فرض کرو کہ [س]ر تعبیر س (س - ۱) (س - ۲) . . (س - ر + ۱) کو کرتا ہے اور س خواہ کچہ ہی ہو تو

$$[ا + ب]_ن = [ا]_ن + ن [ا]_{ن-۱} ب + \frac{ن(ن-۱)}{۱ \times ۲} [ا]_{ن-۲} [ب]_۲ + . . + [ب]_ن$$

اسواسطی کہ فرض کرو ا مثبت صحیح مقدار ہی تو یہہ ہم کو معلوم ہی کہ یہہ مسئلہ صحیح ہی خواہ ب کی کوئی مثبت صحیح قیمت ہو کیونکہ $(۱ + لا)^{ا + ب}$ اور $(۱ + لا)^ا \times (لا + لا)^ب$ مین امثال لا کے مساوات سی یہہ نتیجہ استخراج ہوتا ہی پس اسی معلوم ہوا کہ ب کی ن قیمتون سی زیادہ قیمتون کی واسطی بہی یہہ مسئلہ ازروی تطابق کے بموجب دفعہ ۳۹ کے صحیح ہی یعنی جب ا کوئی مثبت صحیح مقدار ہی تو ب کی تمام قیمتون کی صورت مین مسئلہ صحیح ہے اور چونکہ کوئی مثبت صحیح ا کے واسطی مسئلہ صحیح ہی تو وہ ا کی ن قیمتون سی زیادہ قیمتون کی واسطی صحیح ہی اور اسیواسطی بموجب دفعہ ۳۹ کے وہ ا کی تمام قیمتون کے واسطے صحیح ہے غرض یہہ سلسلہ اسطرح صحیح ثابت ہوتا ہی کہ ضابطہ جملہ ثنائی کو مثبت صحیح قوت نما کی صورت مین فرض کرلین اور پہر دفعہ ۳۹ کی ضابطہ کو بہی صحیح مان لین اس مسئلہ کا نام کبہی واندرمونڈ بہی لیا جاتا ہی جب نولر کا ضابطہ ثنائی اوس حالت مین ثابت کرتے ہین کہ قوت نما

کچھ ہی ہو تو اس مسئلہ کا وہاں کام پڑتا ہی اور یہہ بات مشہور ہی اور وہاں اس مسئلہ کو موافق اصول مستقل صور متشادیہ کے قائم کیا ہے

(۲۹۵) فرض کرو کہ مساوات مح (لا) = ۰ کی ایک قیمت ا ہی تو ہم فرض کر سکتی ہین کہ

$$\text{مح}(\text{لا}) = (\text{لا} - \text{ا})\,\text{مر}(\text{لا})$$

تو

$$\frac{\text{مح}(\text{لا})}{\text{لا}} = \left(۱ - \frac{\text{ا}}{\text{لا}}\right)\text{مر}(\text{لا})$$

$$\text{لوک}\,\frac{\text{مح}(\text{لا})}{\text{لا}} = \text{لوک}\left(۱ - \frac{\text{ا}}{\text{لا}}\right) + \text{لوک}\,\text{مر}(\text{لا})$$

$$= -\left(\frac{\text{ا}}{\text{لا}} + \frac{۱}{۲}\frac{\text{ا}^۲}{\text{لا}^۲} + \cdots\right) + \text{لوک}\,\text{مر}(\text{لا})$$

فرض کرو کہ لوک $\frac{\text{مح}(\text{لا})}{\text{لا}}$ کو ایسی سلسلہ مین پھیلائین کہ اوسمین لا کی مثبت اور منفی قوتین ملتف ہون اور لوک مر (لا) کو ایسی سلسلہ مین پھیلائین کہ اوسمین صرف لا کی مثبت قوتین ہون تو پھر مساوات کی دونو ارکان کا تطابق فرض کرین تو یہہ نتیجہ حاصل ہوگا کہ

− ا = امثال $\frac{۱}{\text{لا}}$ کی جو صورت مفصلہ لوک $\frac{\text{مح}(\text{لا})}{\text{لا}}$ مین ہون

(۲۹۶) دفعہ بالا کی مسئلہ کو مرفی صاحب نی اپنی رسالہ مسائل معادلات مین لکھا ہے اس مسئلہ کا اثبات ناقص ہی کیونکہ سلسلہ غیر متناہی صورت مفصلہ کا انفراجی ہو سکتا ہے اس مسئلہ پر بڑی بڑی کتابون مین بحث لکھی ہے

(۲۹۷) مثلاً فرض کرو کہ اس مساوات

$$\text{لا}^{\text{ن}} + \text{س}\,\text{لا} - \text{ب} = ۰$$ کی ایک قیمت دریافت کرو

یہان

$$\frac{\text{مح}(\text{لا})}{\text{لا}} = \text{س} - \frac{\text{ب}}{\text{لا}} + \text{لا}^{\text{ن}-۱}$$

$$\text{لوک}\,\frac{\text{مح}\,\text{لا}}{\text{لا}} = \text{لوک}\,\text{س} + \text{لوک}\left(۱ - \frac{\text{ب}}{\text{س}\,\text{لا}} + \frac{\text{لا}^{\text{ن}-۱}}{\text{س}}\right)$$

$$= \text{لوک}\,\text{س} - \text{ی} - \frac{۱}{۲}\text{ی}^۲ - \frac{۱}{۳}\text{ی}^۳ - \cdots$$

اسمین

$$\text{ی} = \frac{\text{ب}}{\text{س}\,\text{لا}} - \frac{\text{لا}^{\text{ن}-۱}}{\text{س}} = \frac{\text{ب}}{\text{س}\,\text{لا}}\left(۱ - \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\text{ب}}\right)$$

اب ہم کو ان ارقام کا التقاط کرنا چاہئی جسمین $\frac{۱}{\text{لا}}$ ملتف ہو تو ہم ایک ایسی رقم

ی سی اور ی^ن+۱ سی اور ی^ن+۲ سی اور علی ہذا القیاس حاصل کر سکتے ہین

پس اسی معلوم ہوا کہ قیمت دریافت کرنی کیواسطے یہہ سلسلہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{ب}{س} - \frac{ب^{ن}}{س^{ن+۱}} + \frac{۲ن}{۲}\,\frac{ب^{۲ن+۱}}{س^{۲ن+۱}} - \frac{۳ن(۳ن-۱)}{۲\times۳}\,\frac{ب^{۳ن-۲}}{س^{۳ن+۱}} + \cdots$$

(۲۹۸) فرض کرو کہ مساوات مح (لا) = ۰ کی قیمتین ا۱ و ا۲ ۰۰ ام ہین پس ہم فرض کر سکتے ہین کہ

$$مح\,(لا) = (لا - ا_۱)\,(لا - ا_۲) \cdots (لا - ا_م)\,مر\,(لا)$$

$$\text{تو}\ \frac{مح\,(لا)}{لا^{م}} = (۱ - \frac{ا_۱}{لا})\,(۱ - \frac{ا_۲}{لا}) \cdots (۱ - \frac{ا_م}{لا})\,مر\,لا$$

طرفین مساوات کی لوگارثم لو تو بموجب دفعہ ۲۹۵ کے ہم کو یہہ نتیجہ حاصل ہوگا کہ

− (ا۱ + ا۲ + ۰۰ + ام) برابر امثال $\frac{۱}{لا}$ کے ہے جو صورت مفصلہ

لوک $\frac{مح\,(لا)}{لا^{م}}$ مین ہو مرفی صاحب کے رسالہ مسائل معادلات کو دیکھو

(۲۹۹) ایک کسر ناطقہ کی تحلیل کرنی کا اور کسور مین بیان کرتے ہین ان کسور کو بلحاظ اصلی کسور کے کسور جزئیہ کہتے ہیں

فرض کرو کہ ن درجہ کا جملہ لا کا مح (لا) ہی اور مساوات مح (لا) = ۰ کی سب قیمتین غیر مساوی مین

اور ا و ب و س ۰۰ سی تعبیر ہوئی ہین اور مر (لا) ایک جملہ لا کا (ن − ۱) درجہ کا

یا اوسی بہی ادنی درجہ کا ہی تو یہہ ارتباط از روی تطابق کی صحیح ہوگا کہ

$$\frac{مر\,(لا)}{مح\,(لا)} = \frac{ا}{لا - ا} + \frac{ب}{لا - ب} + \frac{س}{لا - س} + \cdots \frac{ک}{لا - ک}$$

بشرطیکہ مستقل قیمتین ا و ب و س ۰۰ ک کے واسطے مقرر کیجائین

اب تا کہ یہہ ارتباط از روی تطابق کی صحیح ہو تو یہہ ضروری اور کافی ہی کہ از روی تطابق کے یہہ صحیح ہو کہ

$$مر\,(لا) = ا\,\frac{مح\,لا}{لا - ا} + ب\,\frac{مح\,(لا)}{لا - ب} + س\,\frac{مح\,(لا)}{لا - س} \cdots + ک\,\frac{مح\,(لا)}{لا - ک}$$

ارکان اس مساوات کے ن − ۱ درجے سے بڑی درجے کی نہین ہین اسی معلوم ہوا کہ یہہ ارتباط

از روی تطابق کی صحیح ہوگا اگر ن قیمتین لا کی وہ دریافت ہو جائین جنکی واسطے وہ صحیح ہے

دفعہ ۳۰۹ دیکھو اور ا و ب اور س ۰۰ ک مین مناسب انتخاب کر کے ارتباط

کو صحیح لا کی ن قیمتون ا و ب و س ۰۰ ک کی واسطے کر سکتے ہین اسواسطے کہ

فرض کرو لا = ۱ اسی تمام ارقام بایئں طرف معدوم ہو جاتی ہین الا وہ مقدار جسمین ا ملتق ہی اور ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{مر}\,(\text{ا}') = \text{ا} \left[\frac{\text{مر لا}}{\text{لا} - \text{ا}'}\right]_{\text{لا} = \text{ا}}$$

یعنی بموجب دفعہ ۲۷۴ کے

$$\text{مر}\,(\text{ا}') = \text{ا}\,\text{حَ}\,(\text{ا})$$

اسی ا قطعی دریافت ہوتا ہی اور اسیطرح قیمتین ا و ب و س . ک کی دریافت ہوتی ہین

(۳۰۰) اب فرض کرو کہ مر (لا) درجہ ادنی کا بہ نسبت حَ (لا) کے نہین ہے تو معمولی تقسیم کے قاعدہ سی ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{مر}\,(\text{لا})}{\text{حَ}\,(\text{لا})} = \text{ح}\,(\text{لا}) + \frac{\text{ح}'\,(\text{لا})}{\text{حَ}\,(\text{لا})}$$

ہمین ح (لا) اور ح' (لا) جملی صحیحہ لا کی ہین اور ح (لا) کا درجہ ادنی بہ نسبت حَ (لا) کے ہی اب $\frac{\text{ح}'\,(\text{لا})}{\text{حَ}\,(\text{لا})}$ موافق دفعہ گذشتہ کی تحلیل کسور جزئیہ مین کرین

چونکہ ہم کو یہہ معلوم ہے کہ

$$\text{مر}\,(\text{لا}) = \text{حَ}\,(\text{لا})\,\text{ح}\,(\text{لا}) + \text{ح}'\,(\text{لا})$$

اسی یہہ استخراج ہوتا ہی کہ مر (لا) اور ح' (لا) کی ایک ہی قیمت ہی جب حَ (لا) معدوم ہو اسی معلوم ہوا کہ کسور جزئیہ مطابق $\frac{\text{مر}\,(\text{لا})}{\text{حَ}\,(\text{لا})}$ کی تشخیص موافق دفعہ ۲۹۹ کے ہوسکتی ہین پہلی اسی کہ ہم مر (لا) کو حَ لا پر تقسیم کرین اگر $\frac{\text{مر}\,(\text{لا})}{\text{حَ}\,(\text{لا})}$ کی کامل قیمت دریافت کرنی ہوتی تو ہم کو جز ح (لا) کو ساقط کرنا نہ چاہئی تہا

(۳۰۱) ہم نتایج کو وقت سی خالی کرنی کی لئی دفعات گذشتہ مین کسر ناطقہ کے تحلیل کرنے کا طریقہ کسور جبریہ مین اوس صورت مین بیان کیا ہی کہ اونمین اجزاء ضربی مکرر نہین اتے یہہ ایک خاص صورت تہی اب ہم علی العموم اسکی تحقیقات کرتے ہین

(۳۰۲) فرض کرو کہ حَ (لا) ایک جملہ لا کا ہی جسمین اجزاء ضربی مکرر اتی ہین مثلاً فرض کرو کہ

$$\text{مح}(\text{لا}) = \text{ع}\,(\text{لا} - \text{اَ})^{\text{ر}}\,(\text{لا} - \text{ب})^{\text{ص}}\,(\text{لا} - \text{س})^{\text{ط}} \cdots (\text{لا} - \text{اَ}_{\text{ن}})$$

اور مر (لا) کا درجہ لا کا ہی تو جملہ $\frac{\text{مر}(\text{لا})}{\text{مح}(\text{لا})}$ اجزا ذیل میں تحلیل ہو سکتا ہی (۱) کوئی جز ضربی لا − ک جو مکرر نہیں آتا اوسی ایک رقم $\frac{\text{ک}}{\text{لا} - \text{ک}}$ پیدا ہوگی (۲) جز ضربی $(\text{لا} - \text{اَ})^{\text{ر}}$ سے یہہ سلسلہ ارقام پیدا ہوگا کہ

$$\frac{\text{ا}}{(\text{لا} - \text{اَ})^{\text{ر}}} + \frac{\text{ا}_1}{(\text{لا} - \text{اَ})^{\text{ر}-1}} + \frac{\text{ا}_2}{(\text{لا} - \text{اَ})^{\text{ر}-2}} + \cdots + \frac{\text{ا}_{\text{ر}-1}}{\text{لا} - \text{اَ}}$$

اور اسی طرح کا سلسلہ ارقام اور ہر ایک جز ضربی مکررہ سی پیدا ہوگا (۳) اگر مر (لا) ادنی درجہ کا مح (لا) سی نہیں ہوگا تو ایک جملہ صحیحہ بھی پیدا ہوگا

اسواسطے کہ فرض کرو کہ $\text{مح}(\text{لا}) = (\text{لا} - \text{اَ})^{\text{ر}}\,\text{ھر}(\text{لا})$ تو ا خواہ کچھ ہی ہو ازروی تطابق کے

$$\frac{\text{مر}(\text{لا})}{\text{مح}(\text{لا})} = \frac{\text{ا}}{(\text{لا} - \text{اَ})^{\text{ر}}} + \frac{\text{مر}(\text{لا}) - \text{ا}\,\text{ھر}(\text{لا})}{\text{مح}(\text{لا})}$$

اب فرض کرو کہ $\text{مر}(\text{اَ}) - \text{ا}\,\text{ھر}(\text{اَ}) = 0$ تو $\text{مر}(\text{لا}) - \text{ا}\,\text{ھر}(\text{لا})$ جب لا = اَ کے ہو معدوم ہوگا اور اسیواسطے لا − اَ پر پورا تقسیم ہوگا

اسیواسطے ا کے اس قیمت کے موافق ہم یہہ رکھہ سکتی ہیں کہ

$$\text{مح}(\text{لا}) - \text{ا}\,\text{ھر}(\text{لا}) = (\text{لا} - \text{اَ})\,\text{مح}_1(\text{لا})$$

اور اسیواسطے

$$\frac{\text{مر}(\text{لا})}{\text{مح}(\text{لا})} = \frac{\text{ا}}{(\text{لا} - \text{اَ})^{\text{ر}}} + \frac{\text{مر}_1(\text{لا})}{(\text{لا} - \text{اَ})^{\text{ر}-1}\,\text{ھر}(\text{لا})}$$

اسی طرح سی آخر کسر کی تحلیل کرکے یہہ حاصل کر سکتی ہیں کہ

$$\frac{\text{مر}_1(\text{لا})}{(\text{لا} - \text{اَ})^{\text{ر}-1}\,\text{ھر}(\text{لا})} = \frac{\text{ا}_1}{(\text{لا} - \text{اَ})^{\text{ر}-1}} + \frac{\text{مر}_2(\text{لا})}{(\text{لا} - \text{اَ})^{\text{ر}-2}\,\text{ھر}(\text{لا})}$$

پس اسی طریقہ سی بار بار عمل کرنے سے نتیجہ مطلوب قائم ہو جائیگا

(۳۰۳) دفعہ ۲۷۳ کی طرح یہہ ثابت کرنا آسان ہی کہ $\frac{\text{مر}(\text{لا})}{\text{مح}(\text{لا})}$ کی تحلیل صحیحہ حملوں میں ایک ہی طرز پر ہو سکتی ہی اور کسور جزئیہ کا ایک سلسلہ ہوتا ہی جسکی نسبنما میں ایک جداگانہ ہی جز ضربی ملتف ہوتا ہے اسی معلوم ہوا کہ آخر کو نتیجہ ایک ہی حاصل ہوگا خواہ اعمال کی ترتیب کچھ ہی ہو

یعنی خواہ کسی جز ضربی پر اول ہم عمل کرین

عملاً عمدہ طریقہ کسور جزئیہ کے شمار کنندون کے دریافت کرنے کا ذیل مین لکھا جاتا ہے کہ لا = ا + ھ کی رکھو تو

$$\frac{م(لا)}{مح(لا)} = \frac{م(لا)}{(لا - اَ)ھر(لا)} = \frac{م(اَ + ھ)}{ھ ھر(ا + ھ)}$$

اگر کسی ترکیب سے $\frac{م(اَ + ھ)}{ھر(ا + ھ)}$ کو قواء ھ مین پہیلاؤ تو بموجب طریقہ کتابت کی جو اوپر بیان ہوا ہے یہہ نتیجہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{م(اَ + ھ)}{ھر(اَ + ھ)} = ا + ا_{1} ھ + ا_{2} ھ^{2} + ا_{3} ھ^{3} + \ldots$$

یعنی $\frac{م(ا + ھ)}{ھر(ا + ھ)}$ کی صورت منفصلہ مین جو موافق قواء متصاعدہ ھ کے ہو وام امثال ھم کے ہین اور اسیطرح سے اور کسور جزئیہ کے شمار کنندون کو مقرر کرو

(۳۰۴) اب دفعات ذیل مین مسائل لکہی ہین جنسے کہ مساوات کی قیمتون کی حدود غائی معلوم ہون وہ پروفیسر ڈی مورگن نے چہٹی مورخہ ۶ فروری ۱۸۵۸ع مین لکھکر بہیجی تہی

(۳۰۵) اس مسئلہ مین مساوات کی قیمتون کی حدود غائی کی دو ترکیبین جو باب ہفتم مین بیان ہوئی ہین داخل ہین اور اون پر کچھ اور مزید ہے

فرض کرو کہ ح (لا) = ع. لا^ن + ع۱ لا^ن-۱ + ... + ع ن-۱ لا + ع ن

اب ہم کو مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمتون کی اعلی حد غائی دریافت کرتے ہین

فرض کرو کہ لا برابر اول رقم کے امثال ہو یا اوسی کسی کم شی کا اور ب کم از کم مثبت امثال اوسکے مابعد اور کسی منفی امثال کا ماقبل ہو یا اوسی کسی کم شی کا اور س برابر سب سے بڑی منفی امثال کے عددے قیمت کی ہو یا اوسی کسی بڑی شی کی

اور فرض کرو کہ لا^ن-ک-۱ اول رقم ہے جسکی امثال منفی ہین تو ح (لا) یقینی مثبت ہوگا اگر جملہ ذیل مثبت ہو کہ

(لا^ن + ب (لا^ن-۱ + ... + لا^ن-ک) - س (لا^ن-ک-۱ + ... + لا + ۱)

یعنی جب جملہ ذیل مثبت ہو کہ

$$ا\,لا^{ن} + ب\,\frac{لا^{ن} - لا^{ن-ک}}{لا-۱} - س\,\frac{لا^{ن-ک}-۱}{لا-۱}$$

یعنی لا کو بڑا واحد سے فرض کرکے

$$\left\{ا(لا-۱)+ب\right\}لا^{ن} - (ب+س)\,لا^{ن-ک}+س$$

مثبت ہے یعنی یہہ بدرجہ اولی مثبت ہے جب

$$\left\{ا(لا-۱)+ب\right\}لا^{ک} - (ب+س)$$

صفر یا مثبت ہو

(۱) فرض کرو کہ ب = ۰ اور س تعداد اُس سب سے بڑا منفی امثال ہی تو ح (لا) مثبت ہے اگر ا (لا − ۱) − س صفر یا مثبت ہی یعنی اگر لا = ۱ + $\frac{س}{ا}$ یا اسی بڑی شئی کی برابر ہو دفعہ ۸۷ دیکھو

(۲) فرض کرو کہ ب = ۰ اور س تعداد اُس سب سے بڑا منفی امثال ہو تو ح (لا) مثبت ہوگا اگر ا (لا − ۱) $لا^{ک}$ − س صفر یا مثبت ہی اور اسیواسطے بدرجہ اولیٰ مثبت ہوگا اگر ا $(لا-۱)^{ک+۱}$ − س ایں ہو یعنی اگر لا = ۱ + $\left(\frac{س}{ا}\right)^{\frac{۱}{ک+۱}}$ یا کسی بڑی شئے کے دفعہ ۸۹ دیکھو

(۳) ا کی جگہ صفر رکھو تو ح (لا) مثبت ہوگا اگر ب $لا^{ک}$ − (ب + س) صفر یا مثبت ہے یعنی اگر لا = $\left(۱ + \frac{س}{ب}\right)^{\frac{۱}{ک}}$ یا کسی بڑی شی کی یہہ ایک نئی حد غائی ہی جو چھوٹی بہ نسبت (۲) کے ہی جب ب بڑی ع سے مقرر کیجاے

(۴) اگر ا بڑا بہ نسبت ب کے نہ ہو تو ح (لا) مثبت ہے اگر

$$\left\{ا(لا-۱)+ا\right\}لا^{ک} - (ا+س)$$

صفر ہے یا مثبت ہی یعنی اگر لا = $\left(۱ + \frac{س}{ا}\right)^{\frac{۱}{ک+۱}}$ یا کسی بڑی شئے کے اور اسی چھوٹی حد بہ نسبت (۳) کے معلوم ہوتی جب ب چھوٹی ع سی نہ مقرر کیجاے

(۵) فرض کرو کہ ب چھوٹا س سی نہین ہی تو اس سی ہم کو اعلی حد غائی $۲^{\frac{۱}{ک}}$ حاصل ہوگی

(۶) فرض کرو کہ ا چھوٹا س سی نہین ہی تو (۲) سی ۱ + $۲^{\frac{۱}{ک+۱}}$ اعلی حد غائی حاصل ہوگی

(۷) فرض کرو کہ ا ۔ب چہوٹا س سی ہی تو (۴) سی ہم کو $\frac{ب}{۲}$ + ۱ اعلی حد غائی حاصل ہوگی

(۳۰۶) اب ہم مساوات کی قیمتوں کی حدود غائی کی باب مین ایک اور مسئلہ لکھتی ہین وہ موقوف اسی جملہ ا لا^{ن} + ب لا$^{ن-۱}$ + س لا$^{ن-۲}$ + ۰۰ کی قیمت کے حساب لگانے پر موقوف ہی اور اس حساب کی ترکیب موافق قیمت معینہ لا کے دفعہ ۵ مین بیان ہوئی ہی اگر سر ایک قیمت معینہ کو تعبیر کرتی ہی تو حساب سی متواتر یہہ حاصل ہوگا کہ

ا ، سر د ا سر + ب و (ا سر + ب) سر و (ا سر + ب) سر + س ۰۰۰

فرض کرو کہ ح (لا) = ۰ مساوات ہی اب ح (لا) کی جماعتین اسطرح بناؤ کہ ہر ایک جماعت مین مثبت رقمین اور اوسکی اگی وہ منفی رقمین ہون جو ماقبل اگانی والی مثبت رقموں کی ہون اب فرض کرو کہ فقط علامتوں ہی کے لکھنے سی یہہ تواتر حاصل ہو کہ

+ + - - - + - + - + + - - - - + - - + - - +

اب اسکی جماعتین اسطرح بناؤ کہ

(+ + - -) و (+ -) و (+ + - - - -) و (+ - -) و +

فرض کرو کہ اول جماعت مین تواء لا کے لا^{ن} سے لا$^{ن-ع}$ تک ہین اور یہہ دو تواء اسمین داخل ہین فرض کرو کہ جزو ضربی لا$^{ن-ع}$ تقسیم کرنی سی ساقط کیا گیا اور امتحان سی لا کی ایک قیمت بر مقرر کرو اور جب لا = بر کے ہو تو خارج قسمت کا حساب لبعد از تقسیم لا$^{ن-ع}$ کے کرو اگر نتیجہ مثبت ہی تو اوسکو ا، سی تعبیر کرو اور ا، لا$^{ن-۱}$ کو دوسری جماعت کا سر بناؤ اور فرض کرو کہ یہہ جماعت اوس رقم تک جسمین لا$^{ن-ک}$ ملتف ہی پہلتی ہے یس جب ا، لا$^{ن-ک}$ دوسرے جماعت مین سب سے اول مقرر کیا گیا ہو تو لا$^{ن-ل}$ پر تقسیم کرو اور جب لا = سر ہو تو قسمت خارج قسمت کا حساب کرو اور اوسکو ا، سی تعبیر کرو اور ا، لا$^{ن-ن}$ کو جماعت مابعد مین سب سے اول لکھو اور علی ہذا القیاس اگر تمام نتیجے اخر تک مثبت ہون تو بر اعلی حد غائی مثبت قیمتوں کی ہوگی اور عدد بر کا اسان قواعد مین سی موافق ایک قاعدہ کے منتخب ہوسکتا ہے

اس بات کو یاد رکھنا چاہی کہ جب اول ہی جماعت کا حساب کرو تو اوسی جو اعلی حد غائی دریافت ہوگی اوسی بہت بڑا عدد مطلوب بر نہین ہوگا

مثلاً مساوات اٹھارہ درجی کی ہی تو اب ہم صرف امثال کو جماعتون مین لکھتی ہین کہ

(۷ + ۴ + ۳ − ۸۰ − ۱۰۰) + (۲۰ − ۱۰۰) + (۳ + ۲ + ۱ − ۴۰ − ۱۰۰۰۰ − ۱۰۰۰)

+ (۷۰ − ۸۰۰۰ − ۲۰۰۰) + (۱۰۰ − ۴۰۰ − ۴۰۰۰)

اول جماعت پر خیال کرین تو یہہ معلوم ہوتا ہی کہ ۲ مثبت چھوٹا عدد ہی اسلیے ۳ پر امتحان کرنا چاہیے اب ہم قیمت

۷ لا^۴ + ۴ لا^۳ + ۳ لا^۲ − ۸۰ لا − ۱۰۰

کا جب لا = ۳ کے ہو حساب کرین

۷	۴	۳	۸۰ −	۱۰۰ −
۷	۲۵	۷۸	۱۵۴	۳۶۲

پس ا۱ = ۳۶۲

اب ہم قیمت

۳۶۲ لا^۲ + ۲۰ لا − ۱۰۰

کا جب لا = ۳ کے ہو حساب کرتے ہین

۳۶۲	۲۰	۱۰۰ −
۳۶۲	۱۱۰۶	۳۲۱۸

پس ا۲ = ۳۲۱۸

اب قیمت

۳۲۱۸ لا^۶ + ۳ لا^۵ + ۴ لا^۴ + لا^۳ − ۴۰ لا^۲ − ۱۰۰۰۰ لا − ۱۰۰۰ کا

کا حساب جب لا = ۳ کے ہو کرتے ہین

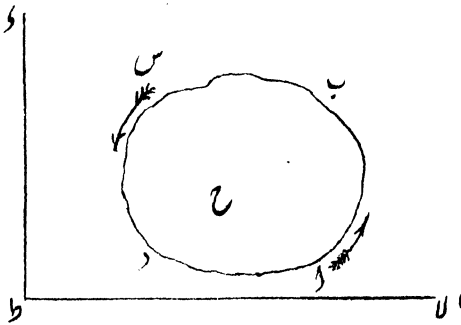
اب یہہ ظاہر ہی کہ ہم کو تمام نتایج ا۳ و ا۴ و ا۵ مثبت حاصل ہونگے پس اسی معلوم ہوا کہ ۳ مثبت قیمتون کی اعلی حد غائی ہے

اس مثال مین موافق دفعہ ۹ کے اعلی حد غائی ۱ + ۸۰۰۰ / ۱۱۰ ہی یہہ بڑا ۷ سے ہے
اور بموجب دفعہ ۸۹ کے اعلی حد غائی ۱ + ۳ ۸۰۰۰ / ۷ ہی اور یہہ ۱۱ سی زیادہ ہے

الحاصل مختصر بیان اس مسئلہ کا یہہ ہی کہ تمام جملی کو متواتر مثبت اور صحیح جماعتون
لاع - ب لاں + س لار - د لاص ... مین تقسیم کرو اور ہر جماعت مین لا کا قوت تمام اخر لکہو
اور لاع - ب لاق کو لاں پر تقسیم کرو اور کوئی قیمت لا کی مثلاً م ایسی دریافت کرو
کہ وہ خارج قسمت کو مثبت بنائی اور فرض کرو کہ یہہ خارج قسمت ل ہو ل لاق + س لار - د لاص کو
لاص پر تقسیم کرو اور کوئی قیمت لا کی ل جو شاید م سی بڑی نہ ہو اور چہوٹی م سی تو ہونی نہیں چاہئے
ایسی دریافت کرو جو خارج قسمت کو مثبت بنائی فرض کرو کہ م یہہ خارج قسمت ہو
اب یہہ عمل کو م لاص + ی لاط - ف لاو پر جاری کرو اور علی ہذا القیاس اخر تک یہی عمل جاری رکہو
تو لا کی اخر قیمت اسطرح حاصل ہو گی وہ مساوات کی ہر یک قیمت سی بڑی ہو گی اور اول قیمت
لا کی یعنی م اکثر اخر قیمت سے ہوتی ہے

(۳۰۷) ایک مسئلہ کاچی صاحب کا لکہکر اس باب کو ختم کرتی ہین مطلب اس مسئلہ کا یہہ ہے
کہ حدود معینہ کی درمیان یہہ دریافت کرین کہ کتنی حقیقی اور کتنی خیالی قیمتین واقع ہوتی ہین
سٹرم صاحب کی ضابطہ مین خاص حقیقی قیمتون کی نسبت بیان کیا گیا ہی وہ یہان اس مسئلہ مین
علی العموم خیالی اور حقیقی قیمتون کی واسطی بیان کیا جاتا ہے غرض ضابطہ مخصوص حقیقی قیمتون کے واسطے تہا
اور یہہ مسئلہ علی العموم سب قیمتون کے واسطے ہے

(۳۰۸) کوئی قائم الزاویہ محور مقرر کرو اور لا اور ی محددین کسی نقطہ کے مقرر کرو اور
مح (ی) کوئی جملہ ناطقہ ی کا فرض کرو تو مح (لا + ی √-۱) اس صورت ع + ق √-۱
مین بیان ہو سکتا ہی جو نقطہ ایسا ہے کہ جسکی محددین ع اور ق کو ایک ہی وقت مین معدوم کر دیتے
اوسکا نام نقطہ اصلی رکہو اور ایک احاطہ اب س دکہیچو تو تعداد نقاط اصلی کی جو
اس حلقہ کی درمیان واقع ہونگی قاعدہ ذیل سی دریافت ہو جائینگی فرض کرو کہ ایک نقطہ اس

احاطہ کی گرد مثبت سمت میں حرکت کرتا جاتا ہی اور اس بات کو گنتے جاؤ کہ کتنی دفعہ ع کی نوبت صفر پہ پہونچتی ہی اور اوسکی علامت تبدیل ہوتی ہی فرض کرو کہ ک دفعہ اوسکی علامت + سی - اور ل دفعہ - سی + ہی تو تعداد نقاط اصلی کی احاطہ کے اندر $\frac{1}{2}$ (ک - ل) ہو گی

اس بات پر خیال کرنا چاہیی کہ احاطہ ایسا مقرر کیا گیا ہی کہ کوئی نقطہ اصلی اوسکی اوپر نہیں واقع ہوتا اور اگر کوئی خیالی قیمت مساوات ح (ی) = ۰ دو دفعہ یا تین دفعہ یا زیادہ دفعہ آئی تو ہم کو یہ خیال کرنا چاہیی کہ دو یا تین یا زیادہ اصلی نقطے ہیں اگرچہ وہ منطبق ایک دوسرے پر ہونگے اور مثبت سمت میں حرکت کرنی سی مراد ہماری یہ ہی کہ ایک نصف قطر دائرہ ایک نقطہ قائم سی حلقہ کی اندر نقطہ متحرک تک کھینچا گیا ایک وہ چار قائموں کی برابر مثبت زاویہ پر گذرتا ہی اور نقطہ متحرک گرد حلقہ کے گذرتا ہی اس مسئلہ کی ثابت کرنی کی لئی اول صورت بے نہایت ہی چھوٹی احاطہ کی لیتی ہیں اور پھر ایک صورت احاطہ محدود کی لیتے ہیں

(۳۰۹) احاطہ کی اندر کوئی نقطہ ح جو نقطہ اصلی نہ ہو مقرر کرو اور ایک نہایت ہی چھوٹا احاطہ جسمیں ح ہی داخل ہو مرتسم کرو اور فرض کرو کہ نقطہ متحرک مثبت سمت میں اس نہایت ہی چھوٹی احاطہ کی گرد حرکت کرتا ہی تو ہم کو اب چار صورتوں پر بحث کرنی چاہیئے

(۱) فرض کرو کہ نہ ع نہ ق اس احاطہ کی اندر نہ اس احاطہ کے اوپر معدوم ہوتی ہیں

یہان ع کی تمام دور مین علامت نہین بدلتی تو قاعدہ سی یہہ معلوم ہوتا ہی کہ کوئی اصلی نقطہ احاطہ کی درمیان نہین ہی اور یہہ صحیح بہی ہی کیونکہ ع اور ق معدوم نہین ہوتے

(۲) فرض کرو کہ احاطہ کی اندر نہ احاطہ کی اوپر ق معدوم ہوتا ہی مگر ع معدوم ہوتا ہے اس صورت مین ع کی علامت وہان بدلتا ہی جہان نقطہ متحرک ایسی مقام پر گذرتا ہی جہان ع معدوم ہوتا ہے لیکن انجام دورہ پر ع اپنی اصلی علامت پر آجاتا ہی تو اسی معلوم ہوتا ہی کہ جتنی تغیر + سی - کے ہوئی ہونگی اوتنی تغیر - سی + کے ہوئی ہونگی اسی معلوم ہوا کہ ک اور ل برابر ہین اور قاعدہ سی ظاہر ہوتا ہی کہ کوئی اصلی نقطہ احاطہ کی درمیان نہین واقع ہوتا اور یہہ صحیح ہی کیونکہ ق معدوم نہین ہوتا

(۳) فرض کرو کہ نہ احاطہ کی اندر اور نہ احاطہ کی اوپر ع معدوم ہوتا ہی لیکن ق معدوم ہوتا ہے اس صورت مین ع کبہی معدوم نہین ہوگا اب قاعدہ سی یہہ معلوم ہوتا ہے کہ کوئی نقطہ اصلی احاطہ کے اندر نہین ہے اور یہہ صحیح ہے کیونکہ ع معدوم نہین ہوتا

(۴) فرض کرو کہ ع اور ق دونو احاطہ کی اندر اور اوپر معدوم ہوتے ہین اگر وہ دونو ایک وقت معدوم نہ ہون تو ہم سطح کو جو احاطہ سی گہری ہوئی ہی اور سطحون مین تقسیم کردینگے جنمین سے بعض میں ع صرف معدوم ہوتا ہی اور باقی مین صرف ق معدوم ہوتا ہی تو اسطرح سی دو یا زیادہ احاطی بجای ایک احاطہ کی حاصل ہونگی اور اونکی صورت موافق صورت (۲) اور (۳) کے ہوگی پس صرف یہی ایک صورت رہی جسمین ع اور ق دونو ایک ہی وقت معدوم ہوتے ہین اور ایک نقطہ اصلی احاطہ کے اندر یا اوپر ہی اور ہم احاطہ کو ایسا چہوٹا فرض کرسکتی ہین کہ اوسمین صرف ایک ہی نقطہ اصلی واقع ہو اور کوئی اوسکی اوپر نہ ہو

فرض کرو کہ ط اور ص اس اصلی نقطہ کے محددین ہین اور لا = ط + ص جم ر

اور د = ص + لی جیب ر

لا + د $\sqrt{-1}$ = ا + ب $\sqrt{-1}$ + لی (جم ر + $\sqrt{-1}$ جیب ر)

= ط + ص $\sqrt{-1}$ + د کے مقرر کرو

اب فرض کرو کہ مساوات مح (ی) = ۰ کی قیمت ط + ص $\sqrt{-1}$ م دفعہ مکرر آتی ہے

تو مح (ط + ص $\sqrt{-1}$ + ی) کی صورت س ی^{م} + س$_1$ ی$^{م+1}$ + س$_2$ ی$^{م+2}$ + ...

کی ہوگی اسمین س دس$_1$ دس$_2$ .. خاص خیالی جملی کینڈی کے صورت کے ہین

پس ہم فرض کرسکتی ہین کہ

س = ھ (جم سہ + $\sqrt{-1}$ جب سہ) اور س$_1$ = ھ$_1$ (جم سہ$_1$ + $\sqrt{-1}$ جب سہ$_1$) ...

اسی معلوم ہوا کہ بموجب ضابطہ دی موئور کے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{ع}{ق} = \frac{ھ\ جم\ (م\ بر + سہ) + ھ_1\ ل\ جم\ [(م+1)\ بر + سہ_1] + ھ_2\ ل^2\ جم\ [(م+2)\ بر + سہ_2] + \ldots}{ھ\ جم\ (م\ بر + سہ) + ھ_1\ ل\ جب\ [(م+1)\ بر + سہ_1] + ھ_2\ ل^2\ جب\ [(م+2)\ بر + سہ_2] + \ldots}$$

اب ہم ل کو ایسا چھوٹا فرض کرتی ہین کہ تغیرات علامت کی تعداد مین ل سی کچھ اثر نہ ہو یعنی
ہم اسطرح عمل کرسکتی ہین کہ گویا $\frac{ع}{ق}$ = مم (م بر + سہ) اور چونکہ م ایک صفر کہ کسی دوسرے اضعاف کبیر
زیادہ ہوتا ہی تو ہمیشہ ایک رستہ صفر کی درمیان ایسا ہوگا کہ وہان تغیر علامت + سی - ہو گا
پس ہم کو یہہ حاصل ہی کہ ک = ۲م اور ل = ۰ پس $\frac{1}{2}$ (ک - ل) = م کے بموجب قاعدہ کے

(۱۰۳) مسئلہ اوس صورت مین ثابت ہوا کہ احاطہ نہایت ہی چھوٹا تھا اب اگر احاطہ محدود اب س د ہو
تو اس احاطہ کو غیر متناہی نہایت ہی چھوٹی چھوٹی احاطون مین تقسیم کرو اور یہہ احاطے ایسی مقرر کئی گئی
ہین کہ اونمیں سے نقطہ اصلی کسی ایک پر نہیں واقع ہوتا تو تعداد اصلی نقاط کی احاطہ اب س د کی اندر سطح
دریافت ہوگی کہ ایک نقطہ مقرر پر جو ان بی نہایت چھوٹی چھوٹی احاطون کو مرتسم کرتا ہو اور جو موافق
قاعدہ کی تعداد اصلی نقاط کی حاصل ہو اونکو جمع کرکی $\frac{1}{2}$ مج (ک - ل) سی تعبیر کرین لیکن یہی نتیجہ
حاصل ہوگا اگر ہم تمام تقسیم کے خطوط اندرونی کو محو کردین اور فقط حد اب س د کو رہنی دین
کیونکہ ہر نقطہ جو اندر کے بی نہایت چھوٹی احاطون مین خط تقسیم پر واقع ہوتا ہی دو احاطون سے علاقہ رکھتا ہی
اور ہیوا سطے وہ مرتسم کرنی والی نقطہ سی دو دفعہ مختلف سمتون مین تقاطع کرتا ہے
پس اگر ایک صورت علامت $\frac{ع}{ق}$ کی + سی - مین بدلتی ہی تو دوسری صورت مین - سی
+ مین بدلتی ہی اور کل تعداد $\frac{1}{2}$ مج (ک - ل) پر اثر نہین ہوتا

اسی معلوم ہوا کہ اندر کے خطوط تقسیم محو ہوسکتی ہین اور نقطہ متحرک نقطہ احاطہ ا ب س د کو مرتسم کرتا ہے

پس مسئلہ ثابت ہوا

(۳۱۱) اب ہم اس مسئلہ سی ایک اور مسئلہ مستنبط کرتی ہین کہ اگر ایک مساوات ن درجہ کی ہو تو اوسکی ن قیمتین ہونی چاہئی فرض کرو کہ احاطہ ا ب س د ایک دائرہ ہو اور مرکز اوسکا مبدء ہو اور اوسکا قطر غیر متناہی بڑا ہو تو قیمت ع کی اوس رقم مع (س) پر موقوف ہی جسمین اعلی قوت ھ کی ملتف ہو اور اگر ہم اوس رقم کو ھ (جم سہ + $\sqrt{-1}$ جب سہ) کی فرض کرین تو ع = مم (ن ہر + سہ) پس ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ ک = ۲ ن اور ق = ۰ پس $\frac{1}{2}$ (ک - ل) = ن

(۳۱۲) ہم نی دفعہ ۳۰۸ مین شکل ایسی کہینچی ہی کہ احاطہ کی ہر ایک نقطہ اندرونی سے ایک نصف قطر دائر ایک سمت مین کہینچا ہی اور احاطہ سی ایک ہی نقطہ پر ملتا ہے لیکن احاطہ کی قید اس شکل کی ساتہہ ضرور نہین شکل ایسی بہی ہوسکتی کہ نصف قطر دائر ایک سمت مین کہینچا گیا احاطہ سی طاق دفعہ ملاقی ہو

اسی معلوم ہوا کہ جب نقطہ گرد احاطہ کی متحرک ہوتا ہی تو نصف قطر دائر جو نقطہ متحرک اور کسی مبدء قائم کے درمیان کہینچا جائی اور یہہ نقطہ قائم احاطہ کے اندر ہو تو وہ ہمیشہ ایک ہی سمت مین متحرک نہین ہوگا نقطہ متحرک کی مثبت سمت حرکت سی ہم کو سمجہنا چاہیے کہ گو زاویہ دائر ہمیشہ زیادہ نہ ہوتا ہو مگر اوسپر دورہ مین مثبت زاویہ ۲ ہ کی برابر افزایش ہوتی جس ہیئت کی بیان شکل لکہی ہی اوسکی قید کچہہ نہین ہی غرض شکل کا اثر اثبات پر نہین ہے کیونکہ بے نہایت چہوٹی احاطی اگر ہم چاہین تو پہر بہی ایسی فرض ہوسکتی ہین کہ وہ بیضوی ہون جو مبدء مقرر کو صرف ایک سمت محدودہ مین نصف قطر دائر کہینچا گیا رکہتی ہون اور اگر ہم اس قید کے بہی پابند نہ رہین تو ہم کو یہہ دیکہنا چاہئی کہ دفعہ ۳۰۹ کی اخر مین پر ہمیشہ زیادہ نہین ہوتا تو

برکی ایسی قیمتین ایسی ہونگین کہ جنکی سبب سی کچھ معدوم ہوگا
جنکا ہم کو خیال بہی نہ تہا لیکن اگر ایسا ہوگا تو اتنی ہی وہان تغیرات +سی - اور -سی + بر ہونگے

(۳۱۳) ہم نے اپنی ساری تحقیقات مین یہہ فرض کیا ہی کہ احاطہ کی اوپر کوئی نقطہ اصلی نہین ہے اگر نقطہ اصلی احاطہ پر ہو تو ہماری تحقیقات مین کچہہ تغیر سوا ر دفعہ ۳۰۹ کے اخر کے نہین واقع ہوگا اور یہان فقط اتنا ہوگا کہ ر کے واسطی ۲ کہ کی ترتیب تہی اب حرف ک کی ترتیب ہوگی اور م تغیرات علامت بجای ۲م تغیرات علامت کے واقع ہونگے

(۳۱۴) یہہ کاچی صاحب کا ضابطہ پینی انسائی کلوپیڈیا کے مسائل معادلات کے اندر لکہا ہوا ہے اور پروفیسر ڈی موگن کی علم مثلث اور جبر مقابلہ مین اور انہین صاحب کی اور تحریرات مین موجود ہی غرض انہین کتابون سی اخذ کرکے یہہ سب کچہ لکہا ہے

پچیسواں باب ادخال مقطعات

(۳۱۵) مسئلہ مقطعات کا اب ہم کچہہ بیان کرتی ہین یہہ فرع علم ریاضی کی زمانہ حال کا ایجاد ہے روز بروز اوسکی ترقی ہوتی جاتی ہی اور بہت بڑی بڑی کام اوسی نکلتی ہین اس باب مین بعض خاص مثالین اونکی بیان کرینگے اور اونکی توضیح اور تشریح اسطرح کرینگے کہ جسی طالب علم مقطعات کی ذات اور صفات کو بخوبی سمجہہ جائین اوسی اگی ایک باب مین مسائل عامہ اس فرع کے لکہینگے اور پہر ایک باب مین مسائل معادلات مین جو کام اوسی نکلتا ہی اور جسطرح اونکا استعمال ہوتا ہے بیان کرینگے

(۳۱۶) ان معادلات ہم زاد پر خیال کرو کہ

$$\text{ا}_1\,\text{لا} + \text{ب}_1\,\text{ی} = \text{س}_1 \quad \text{اور} \quad \text{ا}_2\,\text{لا} + \text{ب}_2\,\text{ی} = \text{س}_2$$

ان مساواتون سے یہہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{کہ لا} = \frac{\text{ب}_2\text{س}_1 - \text{ب}_1\text{س}_2}{\text{ا}_1\text{ب}_2 - \text{ا}_2\text{ب}_1} \quad \text{اور ی} = \frac{\text{ا}_1\text{س}_2 - \text{ا}_2\text{س}_1}{\text{ا}_1\text{ب}_2 - \text{ا}_2\text{ب}_1}$$

نسب نما مشترک $\text{ا}_1\text{ب}_2 - \text{ا}_2\text{ب}_1$ کو چار مقادیر ا_1 و ب_1 اور ا_2 و ب_2 کا مقطع کہتے ہین اور اوسکو اس رمز سے تعبیر کرتے ہین کہ

لا اور ی کی قیمتون کی شمار کنندون کو $\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix}$ بہی مقطعات کہتی ہین اور لا اور ی کی قیمت کو اس طرح ظاہر کیا کرتے ہین کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} \text{لا} = \begin{vmatrix} \text{س}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{س}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} \text{ی} = \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{س}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{س}_2 \end{vmatrix}$$

(۳۱۷) ان مقطعات کو رتبہ دوم کا کہتی ہین کیونکہ ہر یک رقم اونکی دو مقدارون سی مرکب ہی اور مقادیر ا_1 و ب_1 اور ا_2 اور ب_2 کو جو مقطع $\text{ا}_1\text{ب}_2 - \text{ا}_2\text{ب}_1$ مین واقع ہوتی ہین اجزاء ذاتی کہتی ہین اور حاصل ضرب $\text{ا}_1\text{ب}_2$ اور $\text{ا}_2\text{ب}_1$ کو اجزاء ترکیبی مقطع کی کہتی ہین رتبہ دوم کی مقطع مین چار اجزاء ذاتی اور دو اجزاء ترکیبی ہوتی ہین

اس مقطع کے تعبیر کرنی کی واسطی جو رمز اوپر بیان ہوئی ہی اوسکی شکل مربع کی ہوتی ہین اور اوسمین دو صفین افقی ہوتی ہین یا دو صفین عمودی

(۳۱۸) اب رتبہ دوم کی مقطعات کی بعض صفات کا بیان کرتے ہین

چونکہ یہہ ہم کو حاصل ہے کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} = \text{ا}_1\text{ب}_2 - \text{ا}_2\text{ب}_1 = \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ا}_2 \\ \text{ب}_1 & \text{ب}_2 \end{vmatrix}$$

اسی یہہ نتیجہ نکلتا ہی کہ اگر افقی صفون کو عمودی صفون مین بدل دین تو کچہ فرق نہین آتا

(۳۱۹) ذیل کے متطابقی آسانی سی ثابت ہوتے ہین کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \text{ب}_1 & \text{ا}_1 \\ \text{ب}_2 & \text{ا}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \\ \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ب}_2 & \text{ا}_2 \\ \text{ب}_1 & \text{ا}_1 \end{vmatrix}$$

پس مقطع مین اگر دو افقی صفین یا دو عمودی صفین آپسمین متبدل ہو جائین تو مقطع کی علامت بدل جاتی ہی مگر اوسکی قیمت مین کچہ خلل نہین واقع ہوتا اور اگر یہہ دونو تبادل

ہوں تو مقطع میں کچھہ بھی تبدل نہیں واقع ہوتا

(۳۲۰) ہم کو معلوم ہے کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ع}\,\text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ع}\,\text{ا}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} = \text{ع} \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix} \text{ع}\,\text{ا}_1 & \text{ع}\,\text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} = \text{ع} \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix}$$

پس اگر ایک افقی صف کی یا ایک عمودی صف کی ہر جز ذاتی کو ایک مقدار معلوم میں ضرب دیں تو مقطع کی ضرب اوس مقدار معلوم میں ہو جاتی ہے

(۳۲۱) ہم کو معلوم ہے کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ا}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ا}_2 \end{vmatrix} = 0$$

پس اگر دو افقی صفیں اور عمودی صفیں متطابقہ ہوں تو مقطع معدوم ہو جائیگا

(۳۲۲) مقطعات کی توضیح اور تشریح سے یہہ ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1+\text{اَ}_1 & \text{ب}_1+\text{بَ}_1 \\ \text{ا}_2+\text{اَ}_2 & \text{ب}_2+\text{بَ}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{اَ}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{اَ}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{بَ}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{بَ}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{اَ}_1 & \text{بَ}_1 \\ \text{اَ}_2 & \text{بَ}_2 \end{vmatrix}$$

پس وہ مقطع جسکا ہر یک جز ذاتی مجموعہ دو رقموں کا ہو مساوی اون چار مقطعات کی ہوتا ہے جو اس سے بنتی ہیں کہ بجای ہر کل سطر عمودی کی ہم اونکی جزئیات عمودی سطروں کی لیں اور یہہ ایک خاص صورت ہی کہ ہم فرض کریں $\text{اَ}_1 = \text{ب}_1$ اور $\text{اَ}_2 = \text{ب}_2$ تو بموجب دفعہ ۳۲۰ کے ا، ب، کے چار مقطعات میں سی دوسرا مقطع معدوم ہو جائیگا اور ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1+\text{ب}_1 & \text{ب}_1+\text{بَ}_1 \\ \text{ا}_2+\text{ب}_2 & \text{ب}_2+\text{بَ}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{بَ}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{بَ}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ب}_1 & \text{بَ}_1 \\ \text{ب}_2 & \text{بَ}_2 \end{vmatrix}$$

(۳۲۳) بموجب دفعہ ۳۲۲ کے

| ا۱ سہ۱ + ب۱ صہ۱ و ا۱ سہ۲ + ب۱ صہ۲ |
| ا۲ سہ۱ + ب۲ صہ۱ و ا۲ سہ۲ + ب۲ صہ۲ |

= | ا۱ سہ۱ و ا۱ سہ۲ ; ا۲ سہ۱ و ا۲ سہ۲ | + | ب۱ صہ۱ و ب۱ صہ۲ ; ب۲ صہ۱ و ب۲ صہ۲ | + | ا۱ سہ۱ و ب۱ صہ۲ ; ا۲ سہ۱ و ب۲ صہ۲ | + | ب۱ صہ۱ و ا۱ سہ۲ ; ب۲ صہ۱ و ا۲ سہ۲ |

= سہ۱ سہ۲ | ا۱ و ا۱ ; ا۲ و ا۲ | + صہ۱ صہ۲ | ب۱ و ب۱ ; ب۲ و ب۲ | + سہ۱ صہ۲ | ا۱ و ب۱ ; ا۲ و ب۲ | + صہ۱ سہ۲ | ب۱ و ا۱ ; ب۲ و ا۲ |

بموجب دفعہ ۳۲۰ کے اور بموجب دفعہ ۳۲۱ کے چار مقطعات مین اول دو مقطعات معدوم ہوتی ہین اور بموجب دفعہ ۳۱۸ کے

| ب۱ و ا۱ ; ب۲ و ا۲ | = − | ا۱ و ب۱ ; ا۲ و ب۲ |

پس ہم نے یہہ چہوڑا ہے کہ

| ا۱ و ب۱ ; ا۲ و ب۲ | (سہ۱ صہ۲ − صہ۱ سہ۲) یعنی | سہ۱ و صہ۱ ; سہ۲ و صہ۲ | × | ا۱ و ب۱ ; ا۲ و ب۲ |

اسیواسطے | سہ۱ و صہ۱ ; سہ۲ و صہ۲ | × | ا۱ و ب۱ ; ا۲ و ب۲ | = | ا۱ سہ۱ + ب۱ صہ۱ و ا۱ سہ۲ + ب۱ صہ۲ ; ا۲ سہ۱ + ب۲ صہ۱ و ا۲ سہ۲ + ب۲ صہ۲ |

پس حاصل ضرب دوسرے رتبہ کے دو مقطعات کا ایک مقطع دوسرے رتبہ کا ہے

اور یہہ ایک خاص صورت ہی کہ اجزاء ذاتی سہ۱ و صہ۱ و سہ۲ و صہ۲ جداگانہ برابر ا۱ و ب۱ و ا۲ و ب۲ کے ہون تو یہہ مربع مقطع کا

| ا۱ و ب۱ ; ا۲ و ب۲ |

برابر اس مقطع کے ہے کہ

۱۰　
ا۱² + ب۱²	ا۱ ا۲ + ب۱ ب۲
ا۱ ا۲ + ب۱ ب۲	ا۲² + ب۲²

(۳۲۴) اب ہم تیسری رتبہ کی مقطعات کا بیان کرتی ہین ان ہمزاد مساواتون پر غور کرو کہ

ا۱ لا + ب۱ ک + س۱ ی = د۱ و ا۲ لا + ب۲ ک + س۲ ی = د۲ اور ا۳ لا + ب۳ ک + س۳ ی = د۳

ان مساواتون سی یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

لا = [د۱ (ب۲ س۳ − ب۳ س۲) + د۲ (ب۳ س۱ − ب۱ س۳) + د۳ (ب۱ س۲ − ب۲ س۱)] ÷ [ا۱ (ب۲ س۳ − ب۳ س۲) + ا۲ (ب۳ س۱ − ب۱ س۳) + ا۳ (ب۱ س۲ − ب۲ س۱)]

اور اسی قبیل کے جملے ، اور ی کے قیمتوں کے واسطے ہونگے
لا کی قیمت کی نسب نما کو تیسری رتبہ کا مقطع کہتی ہین اور اوسکی نو اجزا ذاتی
ا۱ و ب۱ و س۱ اور ا۲ و ب۲ و س۲ و ا۳ و ب۳ و س۳ ہین اور اوسمین چھہ اجزا ترکیبی ہین اونمین سی ہر ایک تین اجزا ذاتی کا حاصل ضرب ہی اور اس مقطع کو اس رقم سے تعبیر کرتے ہین

ا۱	ب۱	س۱
ا۲	ب۲	س۲
ا۳	ب۳	س۳

چونکہ قیمت اس مقطع کے یہہ ہے کہ

ا۱ (ب۲ س۳ − ب۳ س۲) + ا۲ (ب۳ س۱ − ب۱ س۳) + ا۳ (ب۱ س۲ − ب۲ س۱)

اب اسکو ہم دوسرے رتبہ کے مقطعات مین اسطرح بیان کرتے ہین کہ

ا۱ |ب۲ س۲ ؛ ب۳ س۳| + ا۲ |ب۳ س۳ ؛ ب۱ س۱| + ا۳ |ب۱ س۱ ؛ ب۲ س۲|

لا کی قیمت کا شمار کنندہ بہی تیسری رتبہ کا مقطع ہی فقط ا۱ و ا۲ و ا۳ کو د۱ و د۲ و د۳ سے

جداگانہ نسبت نماکی رموزی جملون مین تبدیل کرلین تو شمار کنندہ کی رموزی جملی حاصل ہو جایئگی

اب ہم کو یہہ ظاہر معلوم ہوتا ہی کہ جو صفت اور خاصیت دوسرے رتبہ کی مقطعات کی ہتی وہی ان تیسرے رتبہ کی مقطعات کی صفت اور خاصیت ہے

(٣٢٥) فرض کرو کہ $\text{ا}_1 = 1$ اور $\text{ا}_2 = 0$ اور $\text{ا}_3 = 0$ تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\begin{vmatrix} 1 \ \text{و} \ \text{ب}_1 \ \text{و} \ \text{س}_1 \\ 0 \ \text{و} \ \text{ب}_2 \ \text{و} \ \text{س}_2 \\ 0 \ \text{و} \ \text{ب}_3 \ \text{و} \ \text{س}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ب}_2 \ \text{و} \ \text{س}_2 \\ \text{ب}_3 \ \text{و} \ \text{س}_3 \end{vmatrix}$$

پس اسطرح تیسرے رتبہ کی مقطع کی تحویل دوسرے رتبہ کے مقطع کی طرف ہوگی اور ب_1 اور س_1 کے قیمتین کچہ اس مقطع پر اثر نہین رکہتین اور اگر ہم چاہین تو اونکو برابر صفر کے لکہہ سکتی ہین

اسی معلوم ہوا کہ اگر کوئی ہم کو ارتباط تیسری رتبہ کے مقطعات مین معلوم ہو تو اوسی مثل اوس ارتباط کے دوسری رتبہ کی مقطعات مین ایک ارتباط اسطرح استباط کرسکتی ہین کہ بعض اجزا ذاتی کو معدوم خیال کرین

(٣٢٦) مقطعات کی تشریح اور توضیح سے یہہ ثابت ہوسکتا ہے کہ

$$\text{ا}_1 \begin{vmatrix} \text{ب}_2 \ \text{و} \ \text{س}_2 \\ \text{ب}_3 \ \text{و} \ \text{س}_3 \end{vmatrix} + \text{ا}_2 \begin{vmatrix} \text{ب}_3 \ \text{و} \ \text{س}_3 \\ \text{ب}_1 \ \text{و} \ \text{س}_1 \end{vmatrix} + \text{ا}_3 \begin{vmatrix} \text{ب}_1 \ \text{و} \ \text{س}_1 \\ \text{ب}_2 \ \text{و} \ \text{س}_2 \end{vmatrix}$$

$$= \text{ا}_1 \begin{vmatrix} \text{ب}_2 \ \text{و} \ \text{ب}_3 \\ \text{س}_2 \ \text{و} \ \text{س}_3 \end{vmatrix} + \text{ب}_1 \begin{vmatrix} \text{س}_2 \ \text{و} \ \text{س}_3 \\ \text{ا}_2 \ \text{و} \ \text{ا}_3 \end{vmatrix} + \text{س}_1 \begin{vmatrix} \text{ا}_2 \ \text{و} \ \text{ا}_3 \\ \text{ب}_2 \ \text{و} \ \text{ب}_3 \end{vmatrix}$$

یعنی

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 \ \text{و} \ \text{ب}_1 \ \text{و} \ \text{س}_1 \\ \text{ا}_2 \ \text{و} \ \text{ب}_2 \ \text{و} \ \text{س}_2 \\ \text{ا}_3 \ \text{و} \ \text{ب}_3 \ \text{و} \ \text{س}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ا}_1 \ \text{و} \ \text{ا}_2 \ \text{و} \ \text{ا}_3 \\ \text{ب}_1 \ \text{و} \ \text{ب}_2 \ \text{و} \ \text{ب}_3 \\ \text{س}_1 \ \text{و} \ \text{س}_2 \ \text{و} \ \text{س}_3 \end{vmatrix}$$

اسی ثابت ہوا کہ اگر افقی صف اور عمودی صف باہمین تبدیل ہوجاسکی تو مقطع مین کچہ فرق نہین آتا

(۳۲۷) ذیل کی مطابقی آسانی سی اسطرح ثابت ہوسکتی ہین کہ تیسرے رتبہ کی مقطعات کو دوسرے رتبہ کے مقطعات مین تحویل کرلین اور پہر اونکی توضیح کرین

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{س}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{س}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{س}_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \text{ب}_1 & \text{ا}_1 & \text{س}_1 \\ \text{ب}_2 & \text{ا}_2 & \text{س}_2 \\ \text{ب}_3 & \text{ا}_3 & \text{س}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ب}_1 & \text{س}_1 & \text{ا}_1 \\ \text{ب}_2 & \text{س}_2 & \text{ا}_2 \\ \text{ب}_3 & \text{س}_3 & \text{ا}_3 \end{vmatrix}$$

پس اگر دو عمودی صفون مین تبادل ہو تو علامت مقطع کی بدل جاتی ہی مگر اوسکی قیمت نہین بدلتی اور اسیواسطی اگر یہہ عمل دو دفعہ کیا جاے تو مقطع مین کچہ تبدل نہین ہوتا اسی معلوم ہوا کہ موافق دفعہ ۳۲۶ کے اگر دو افقی صفین باہم متبدل ہون تو مقطع کی علامت بدل جائیگی مگر اوسکی قیمت مین کچہ فرق نہین لگا اور اگر یہہ عمل دو دفعہ کیا جاے تو مقطع مین کچہ تبدل نہین واقع ہوگا

اسی یہہ بہی نتیجہ نکلتا ہی کہ اگر دو عمودی صفون مین بہی تبادل ہو اور دو افقی صفون مین بہی تبادل ہو تو مقطع مین کچہ تبدل نہین ہوگا پس

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{س}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{س}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{س}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ب}_2 & \text{ا}_2 & \text{س}_2 \\ \text{ب}_1 & \text{ا}_1 & \text{س}_1 \\ \text{ب}_3 & \text{ا}_3 & \text{س}_3 \end{vmatrix}$$

(۳۲۸) دفعہ ۳۲۰ کی طرح ثابت کرسکتی ہین کہ اگر ایک افقی صف مین یا عمودی صف مین جزو ذاتی کو کسی معلوم مقدار مین ضرب دین تو مقطع کی ضرب اوس مقدار معلوم مین ہوجائینگی

(۳۲۹) اسکا ثابت کرنا آسان ہے کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{س}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{س}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{س}_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{اور} \quad \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{س}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{س}_2 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{س}_2 \end{vmatrix} = 0$$

پس اگر دو صفین افقی یا دو صفین عمودی متطابق ہون تو مقطع فنا ہوجائیگا

(۳۳۰) اس بات کا ثابت کرنا آسان ہے کہ مقطع

| ا۱ + اَ۱ + اً۱ و ب۱ و س۱ |
| ا۲ + اَ۲ + اً۲ و ب۲ و س۲ |
| ا۳ + اَ۳ + اً۳ و ب۳ و س۳ |

برابر ان تین مقطعات کے مجموعہ کے

ا۱ و ب۱ و س۱	و	اَ۱ و ب۱ و س۱	و	اً۱ و ب۱ و س۱
ا۲ و ب۲ و س۲		اَ۲ و ب۲ و س۲		اً۲ و ب۲ و س۲
ا۳ و ب۳ و س۳		اَ۳ و ب۳ و س۳		اً۳ و ب۳ و س۳

اور اسی کی مشابہ نتیجہ حاصل ہوگا اگر اول عمودی صف مین ہر جزو ذاتی مجموعہ چار رقمون کا یا مجموعہ پانچ رقمون کا اور علی ہذا القیاس ہوتا ——— اگر اجزاء ذاتی ب۱ و ب۲ و ب۳ مین ہریک کی جگہ تین رقمین رکھی جائین تو تین مقطعات بالا مین سی ہریک برابر تین مقطعات کے مجموعہ کے ہوگا اور علی ہذا القیاس

اسطرح سی مقطع ذیل برابر ۲۷ مقطعات کے مجموعہ کے ہوسکتا ہے

| ا۱ + اَ۱ + اً۱ و ب۱ + بَ۱ + بً۱ و س۱ + سَ۲ + سً۲ |
| ا۲ + اَ۲ + اً۲ و ب۲ + بَ۲ + بً۲ و ا۳ + اَ۳ + اً۳ |
| ا۳ + اَ۳ + اً۳ و ب۳ + بَ۳ + بً۳ و س۳ + سَ۳ + سً۳ |

۲۷ مقطعات اسطرح سی اسکی بنتی ہین کہ بجای کل عمودی صف کی لینی کی عمودی صفون کے جزئیات مین سی ایک جزو لیتی ہین پس ان مقطعات مین سی تین وہ مقطعات ہونگے جو اوپر لکھی ہین

(۳۳۱) دفعہ ۳۳۰ کے خاص صورت کے لئی ذیل کا مقطع لیتے ہین کہ

| ا۱ سہ۱ + ب۱ صہ۱ + س۱ لہ۱ ، و ا۱ سہ۲ + ب۱ صہ۲ + س۱ لہ۲ ، و ا۱ سہ۳ + ب۱ صہ۳ + س۱ لہ۳ |
| ا۲ سہ۱ + ب۲ صہ۱ + س۲ لہ۱ ، و ا۲ سہ۲ + ب۲ صہ۲ + س۲ لہ۲ ، و ا۲ سہ۳ + ب۲ صہ۳ + س۲ لہ۳ |
| ا۳ سہ۱ + ب۳ صہ۱ + س۳ لہ۱ ، و ا۳ سہ۲ + ب۳ صہ۲ + س۳ لہ۲ ، و ا۳ سہ۳ + ب۳ صہ۳ + س۳ لہ۳ |

یہہ دریافت ہوا ہی کہ ۲۷ مقطعات مین جنکا مجموعہ یہہ خیال کر سکتی تمام سوا ۶ کی بموجب دفعات ۳۲۸ اور ۳۲۹ کے معدوم ہو جاتی ہین تمثیلاً ۲۷ مقطعات مین سی ایک یہہ لو کہ

| ا۱ سہ۱ و ا۱ سہ۲ و ب۱ صہ۳ |
| ا۲ سہ۱ و ا۲ سہ۲ و ب۲ صہ۳ |
| ا۳ سہ۱ و ا۳ سہ۲ و ب۳ صہ۳ |

یعنی سہ۱ سہ۲ صہ۳

| ا۱ و ا۱ و ب۱ |
| ا۲ و ا۲ و ب۲ |
| ا۳ و ا۳ و ب۳ |

بموجب دفعہ ۳۲۸ کے اور یہہ مقطع بموجب دفعہ ۳۲۹ معدوم ہوتا ہی اور جو چھہ مقطعات باقی رہتی ہین اونمین سے ایک یہہ ہے کہ

| ا۱ سہ۱ و ب۱ صہ۲ و س۱ لہ۳ |
| ا۲ سہ۱ و ب۲ صہ۲ و س۲ لہ۳ |
| ا۳ سہ۱ و ب۳ صہ۲ و س۳ لہ۳ |

یعنی سہ۱ صہ۲ لہ۳

| ا۱ و ب۱ و س۱ |
| ا۲ و ب۲ و س۲ |
| ا۳ و ب۳ و س۳ |

ایک اور باقی ماندہ چھہ مقطعات مین سے لو تو

| ا۱ سہ۱ و س۱ لہ۲ و ب۱ صہ۳ |
| ا۲ سہ۱ و س۲ لہ۲ و ب۲ صہ۳ |
| ا۳ سہ۱ و س۳ لہ۲ و ب۳ صہ۳ |

یعنی سہ۱ لہ۲ صہ۳

| ا۱ و س۱ و ب۱ |
| ا۲ و س۲ و ب۲ |
| ا۳ و س۳ و ب۳ |

یعنی — سہ۱ لہ۲ صہ۳

| ا۱ و ب۱ و س۱ |
| ا۲ و ب۲ و س۲ |
| ا۳ و ب۳ و س۳ |

بموجب دفعہ ۳۲۷ کے

اسکا نتیجہ یہہ ہی کہ جو چھہ مقطعات باقی رہتی ہین اونسی یہہ بنتا ہے کہ

$$\begin{vmatrix} ا_1 \ و \ ب_1 \ و \ س_1 \\ ا_2 \ و \ ب_2 \ و \ س_2 \\ ا_3 \ و \ ب_3 \ و \ س_3 \end{vmatrix} \left[س_1(ص_2 ل_3 - ص_3 ل_2) + س_2(ص_3 ل_1 - ص_1 ل_3) + س_3(ص_1 ل_2 - ص_2 ل_1) \right]$$

یعنی

$$\begin{vmatrix} س_1 \ و \ ص_1 \ و \ ل_1 \\ س_2 \ و \ ص_2 \ و \ ل_2 \\ س_3 \ و \ ص_3 \ و \ ل_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} ا_1 \ و \ ب_1 \ و \ س_1 \\ ا_2 \ و \ ب_2 \ و \ س_2 \\ ا_3 \ و \ ب_3 \ و \ س_3 \end{vmatrix}$$

اسی معلوم ہوتا ہی کہ حاصل ضرب تیسری رتبہ کی دو مقطعات کا تیسری رتبہ کے مقطع مین نمایان ہو سکتا ہی اگر ہم ا۱ و ب۱ ... جداگانہ برابر س۱ و ص۱ ... کے فرض کرین تو ہم تیسری رتبہ کا مقطع حاصل کرینگے اور یہہ متساوی تیسری رتبہ کے مقطع کے مجذور کے ہوگا

(۳۳۲) ہم نی اسقدر مثالین مقطعات کی ذات او صفات کی لکہ دین ہین کہ طالب علم کی سمجہ مین بخوبی یہہ بات اجائیگی کہ یہہ مضمون کیا ہی ہم صرف رتبہ سوم کی مقطعات پر مطلب کو چہوڑتے ہین اس سبب سے کہ جو خواص مقطعات رتبہ سوم کی ثابت ہوئے ہین اوسی ہوا فق دفعہ ۳۲۵ کے رتبہ دوم کے مقطعات کی خواص استخراج ہو سکتی تہی مگر جس طرح سی ہم نی اس مضمون کو بیان کیا ہی اوسیطرح متبدیون کے واسطے سودمند ہی باب اینده مین ہم اثبات علی العموم لکہینگے خواہ مقطعات کسی رتبہ کے ہون اس بات پر غور کرو کہ ہم نی اس مقطعات کی مطلب کی تمہید ہمزاد مساواتون کو حل سے لکہی ہے اس تمہید سی طالب علم ایک ہی دفعہ مین سمجہ سکتا ہے کہ اسی جملی جنکا نام مقطعات رکہا ہے ریاضیات مین واقع ہوتی ہین جب ہم مسئلہ عامہ لکہینگی تو وہان مقطعات کے تغیرات بالکل مساوات سی بی لگاؤ لکہینگے اور اوسی اس مسئلہ عامہ کے بیان کرنی مین اسانی ہوتی ہے اگر ہم تیسرے رتبہ کے مقطع کو ان معنی جدید کے موافق بیان کرین تو طالب علم اوس تعریف مقطعات کو جو باب اینده مین بیان ہوگی خوب سمجہے گا

(۳۳۳) قیمت مقطع

$$\begin{vmatrix} ا_1 \ و \ ب_1 \ و \ س_1 \\ ا_2 \ و \ ب_2 \ و \ س_2 \\ ا_3 \ و \ ب_3 \ و \ س_3 \end{vmatrix}$$

ا۱ ب۲ س۳ − ا۱ ب۳ س۲ + ا۲ ب۳ س۱ − ا۲ ب۱ س۳ + ا۳ ب۱ س۲ − ا۳ ب۲ س۱

ہی اول جز ترکیبی ا۱ ب۲ س۳ ہی اور یہہ حاصل ضرب اون اجزا ذاتی کا ہی جو اوس رقم کے مربع مین کہ مقطع کو تعبیر کرتا ہی قطر مین لکہی ہوئی ہین اور اب باقی اور اجزاء ترکیبی اول جز ترکیبی سے موافق طریقہ ذیل کی استخراج ہو سکتی ہین کہ اعداد زیرین ۱ و ۲ و ۳ حروف ا و ب و س کے نیچے اوتنی مختلف طورون سی لگائی گئی ہین جتنی طور سی ترتیبین ان اعداد زیرین کی ہو سکتی ہین اور علامت + یا − کی کسی جز ترکیبی کے اول اسطرح لگ سکتی ہے کہ یہہ دیکہیں کہ یہہ جز ترکیبی اول جز ترکیبی سی کسطرح مستنبط ہوا ہی اگر جفت دفعہ تبدلات دو اعداد زیرین کا ہوا ہی تو + کی علامت لکہو اور اگر طاق دفعہ تبدلات ہوئی ہین تو − کی علامت مقرر کرو مثلاً دوسرا جز ترکیبی اوپر ا۱ ب۳ س۲ ہی اور وہ اول جز ترکیبی سی اسطرح استخراج ہوا ہے اعداد زیرین ۲ اور ۳ مین تبادل ہوا ہی اسلئی بموجب قاعدہ کے علامت − کی اول لگائی جاے اور یہہ جز ترکیبی ا۲ ب۳ س۱ ہی اور وہ دوسرے جز ترکیبی سی اسطرح حاصل ہوتا ہے کہ اعداد زیرین ۲ اور ۱ مین تبادل ہوا ہی اور اسواسطے وہ اول جز ضربی سی دو اعداد زیرین کے دو تبادل سی مستنبط ہوتا ہی اسواسطے بموجب قاعدہ کی علامت + کی اول لگائی جائی اور اسیطرح اور باقی اجزاء ترکیبی کی مناسب علامات کا فیصلہ ہو سکتا ہے

(۳۴۴) تیسرے رتبہ کے مقطعات کے یہہ خاص صورتین امثلہ ذیل ہین جنکو طالب علم ثابت کر سکتا ہے

(۱)

| ا و ھ و گ |
| ھ و ب و ف |
| گ و ف و س |

= ا ب س − ا ف² − ب گ² − س ھ² + ۲ ف گ ھ .

(۲)

| ۱ و لا۱ و ک۱ |
| ۱ و لا۲ و ک۲ |
| ۱ و لا۳ و ک۳ |

= لا۱ ک۲ − لا۲ ک۱ − لا۲ ک۳ − لا۳ ک۲ + لا۳ ک۱ − لا۱ ک۳

(۳)

| ۱ و ا$_1$ + ا$_2$ و ا$_1$ ا$_2$ |
| ۱ و ب$_1$ + ب$_2$ و ب$_1$ ب$_2$ |
| ۱ و س$_1$ + س$_2$ و س$_1$ س$_2$ |

= (ا$_1$ − ب$_2$)(ب$_1$ − س$_2$)(س$_1$ − ا$_2$) + (ا$_2$ − ب$_1$)(ب$_2$ − س$_1$)(س$_2$ − ا$_1$)

(۴)

| ۱ و ل و − ص |
| − ل و ۱ و س |
| ص و − س و ۱ |

= ۱ + س^2 + ص^2 + ل^2

چھبیسوان باب خواص مقطعات

(۳۳۵) فرض کرو کہ ن رموز ا$_1$ و ا$_2$ ۰۰۰ ان ہین تو اوس ایک رمز کو بہ نسبت دوسرے رمز کے اعلی کہینگے جسمین کہ عدد زیرین بڑا بہ نسبت دوسرے عدد زیرین کے ہو مثلاً ا$_3$ کو اعلی بہ نسبت ا$_2$ یا ا$_1$ کے کہینگے یا ا$_4$ کو اعلی بہ نسبت ا$_3$ و ا$_2$ و ا$_1$ کے کہینگے اور علی ہذا القیاس

اب فرض کرو کہ ان رموز کی ترتیبین بنائی گئین تو جس ترتیب مین دو رمزون کی اعداد زیرین مین اول بڑا بہ نسبت دوسرے کی ہو تو اوسی بی ترتیبی یا انتشار کہتی ہین مثلاً ترتیب ا$_2$ ا$_4$ ا$_3$ ا$_1$ مین چار بی ترتیبیان ہین یعنی ا$_2$ ا$_1$ و ا$_4$ ا$_3$ و ا$_4$ ا$_1$ اور ا$_3$ ا$_1$

(۳۳۶) رموز ا$_1$ و ا$_2$ ۰ ۰ ان مین دو نوع کی ترتیبین ہوسکتی ہین ایک وہ جسمین جفت تعداد بی ترتیبون کی ہو دوسرے وہ جسمین طاق تعداد بی ترتیبون کی ہو

(۳۳۷) جب کسی ترتیب مین دو رمزون مین تبادل اسطرح ہو کہ ایک دوسرے کی مقام بدل لے اور باقی رموز مین کچہ تبدل نہ ہو تو تعداد بی ترتیبون کی جو زیادہ یا کم ہوگی وہ طاق ہوگی

فرض کرو کہ گ و ک دو رموز ہین جسمین ک اعلی ہی اور گ سی پیشتر جماعت رموز کو ا تعبیر کرتا ہے اور گ اور ک کی درمیان جو جماعت رموز ہو اوسکو ب تعبیر کرتا ہے اور گ اور ک کے مابعد جو جماعت رموز ہو اوسکو س تعبیر کرتا ہی تو جن ترتیبون کا باہم مقابلہ کرنا ہے وہ ا گ ب ک س اور ا ک ب گ س ہین تو بی ترتیبون کی تعداد کا فرق موقوف اون رموز

یہ ہی جنسی کہ جماعتین گ ب ک اور ک ب گ بنتی ہین فرض کرو کہ ب مین ص سد موز داخل ہین
اور ان مین سی ص۱ اعلی بہ نسبت گ گ کے ہین اور ص۲ ان مین سی اعلی بہ نسبت ک کے ہے
تو جماعت گ ب ک مین علاوہ اون بی ترتیبون کی جو خود ب مین موجود ہین ص - ص۱ + ص۲
بی ترتیبان اور ہین اسواسطی کہ گ اعلی ص - ص۱ سی ب کے رموز مین ہی
اور ص۲ رموز ب مین اعلی بہ نسبت ک کی ہین جماعت ک ب گ مین سوا اون بی ترتیبون کے
جو خود ب مین ہین ص - ص۲ + ص۱ + ۱ بی ترتیبات ہین اسواسطی کہ ک اعلی بہ نسبت
ص - ص۲ رموز سی ب کی اندر ہی اور ص۱ رموز ب مین اعلی بہ نسبت گ کی ہین اور
ک اعلی بہ نسبت گ کی ہی اسواسطی تفاوت بی ترتیبون کی تعداد مین

ص۱ - ص۲ + ص۱ + ۱ - (ص - ص۱ + ص۲)

یعنی ۲ (ص۱ - ص۲) + ۱ یہہ تفاوت طاق عدد ہی

(۳۳۸) ایک ترتیب معلوم سی تمام ترتیبین جو کل ن رموز کی بنائی جاتی دو رمزون کی تبادل کی تکرار سی مستنبط ہو سکتی ہین اس طریقہ سی جو استخراج ترتیبون کا کرینگی تو موافق دفعہ ۳۳۷ کی باری باری ایسی ترتیبین حاصل ہونگین جنمین ایک دفعہ جفت بی ترتیبیان ہونگین اور دوسری دفعہ طاق بی ترتیبیان ہونگین اور تمام رموز کی ترتیبون کی کل تعداد جفت ہوگی
اسی یہہ معلوم ہوتا ہی کہ ترتیبین جنمین بی ترتیبون کی تعداد جفت ہو اوتنی ہی ہوتی ہے جتنی کہ وہ ترتیبین ہوتی ہین کہ جنمین بی ترتیبون کی طاق تعداد ہو

(۳۳۹) فرض کرو کہ ن۲ مقادیر مربع کی صورت مین اسطرح لکھی جائین

ا۱و۱ و۱و۲ و۱و۳ . . . ا۱ون
ا۲و۱ و۲و۲ و۲و۳ . . . ا۲ون
. . . .
ان و۱ وان و۲ وان و۳ . . . ان ون

یہان کسی مقدار اروی مین عدد زیرین رسی تو افقی صف اور دوسرے عدد زیرین
کسی عمودی صف جسمین اروی نمایان ہو تعبیر ہوتی ہے
رمز بالاسی مقطع ن۲ مقادیر کا جو اوسمین واقع ہوتی ہین تعبیر ہوتا ہی اور ان مقادیر کو اجزای
ذاتی اوس مقطع کا کہتی ہین اور قیمت مقطع کی اسطرح دریافت ہوتی ہی کہ خاص تعداد اجزای ترکیبی کا
مجموعہ لین اور ہر جز ترکیبی مین ن اجزای ذاتی ہین اول جز ترکیبی حاصل ضرب اجزای ذاتی
ا،ا و د۲،۲ و د۳،۳ . . . ان ون کا ہے اور یہہ مربع مذکور کے اوس قطر مین
واقع ہین جو دائین طرف اوپر کی کونہ سی شروع ہوتا ہی اور اپنی مقابل کی کونہ پر ختم ہوتا ہے
ہم اس قطر کو قطر مربع کہینگے اسواسطی کہ ائندہ ہمکو موقع اس قطر کی طرف رجوع کرنی کا ملے گا
اور تمام اور اجزای ترکیبی اول جز ترکیبی ا،ا و د۲،۲ و د۳،۳ . . . د ان ون
سی اسطرح حاصل ہوتی ہین کہ دوسرے عدد زیرین کی ترتیبین لیتی ہین اور پہلی عدد زیرین جیسا ہی
ویسا ہی رہنی دیتی ہین اور علامت + اور − کی اول مقطع کی ہر جز ترکیبی کے اول موافق نوع
کے مقرر کرتے ہین جسکا بیان دفعہ ۲۰۶ مین ہوا اگر وہ اوسی نوع کی ہین جس نوع
کا اول جز ترکیبی ہی تو علامت + کی اول لگاتی ہین اور اگر وہ اس نوع کا نہین ہوتا تو علامت − کی
(۲۴۰) اوپر کے مقطع کون رتبی کا کہتے ہین کیونکہ ہر جز ترکیبی ن اجزای ذاتی کا حاصل ضرب ہوتا ہے
اور تعداد اجزای ترکیبی کے اوتنی ہی ہوتی ہے جتنی کہ تعداد ن اشیا کی ترتیبون کی ہوتی ہے
جب ترتیب کل اشیا کی ایک ہی دفعہ کی جائین یعنی ان انمین سی نصف کی اول علامت + ہوگی
اور نصف کی اول علامت − کی یہہ بہی معلوم ہوتا ہی کہ اجزای ترکیبی کا کسطرح بنائی جانی چاہیئے
اونمین سی ہر ایک جز ترکیبی مین صرف ایک ہی جز ذاتی اوس رمز کی ہر صف افقی کا یا ہر صف
عمودی کا ہوتا ہے جو اوس مقطع کو تعبیر کرتی ہے
(۲۴۱) مقطع کی واسطی بجای رمز بالا کے بعض اوقات یہہ رمز
ح ± ا،ا و د۲،۲ و د۳،۳ . . . ان ون کام مین لاتے ہین یعنی جز ترکیبی اول

کو لکھتی ہین اور اوسکی اول ز مرح ± کو لکھہ دیتی ہین اور اوسی تعبیر ہوتا ہی مجموعہ اجزائ ترکیبی کا
جو اول جز ترکیبی سی مناسب ترتیبون اور علامات + اور - کی ٹھیک ٹھیک مقرر کرنی سے حاصل ہوتا ہے
مقطع کی اجزائ ترکیبی مختلف طور سی تعبیر ہوتی ہین کبھی تو (ے وک) کو بجاے ا ے وک کے
کام مین لاتی ہین اور اس صورت مین یہہ یاد رکھنا چاہئی
کہ (ے وک) اور (ک وے) جدا جدا مقادیر تعبیر ہوتی ہین ادنی رتبی کے مقطعات کی مثالون
مین اسمین آسانی ہوتی ہی کہ دوسری اعداد زیرین کام مین نہ لائین اور ایک ہی حرف تمام اجزائ ذاتی
کے واسطی جو ایک عمودی صف مین ہو کام مین لائین اور ایک ہی اعداد زیرین سی اونمین تمیز پیدا کرین
یہی طریقہ کتابت پہلی باب مین اختیار کیا گیا ہے
(۳۴۲) اور اجزائ ترکیبی مقطع کی اول جز ترکیبی سی اسطرح استخراج ہوتی ہین کہ دوسری
عدد زیرین کی ترتیبین لیتی ہین اور اول عدد زیرین مین کچہ تبدل نہین کرتے اور یہہ اجزائ
ترکیبی ایک اور طرح سی حاصل ہوتی ہین کہ اول اعداد زیرین کی ترتیبین لین اور دوسرے
اعداد زیرین مین تبدل نہ کرین اسواسطی کہ فرض کرو کہ
سہ و صہ و لر . . . ر ایک خاص ترتیبین ن اعداد ا و ۲ و ۳ . . . ن
کی تعبیر کرین تو ا۱ سہ و ا۲ صہ و ا۳ لر . . . ان وک ایک جز ترکیبی ہی جو اسطرح
پیدا ہوتا ہے کہ اول جز ترکیبی مین دوسری عدد زیرین ۱ و ۲ . . ن کو
سہ و صہ و لر . لرسے بدل دین لیکن یہی جز ترکیبی اول جز ترکیبی
ا۱ و ا۲ و ۲ . . . ان ون سے بہی اسطرح استخراج ہو سکتا ہے کہ
دوسری اعداد زیرین مین کچہ تبدل نہ کرین اور اول اعداد زیرین کو مناسب طور پر
تبدیل کرین یعنی اکو سہ سی اور ۲ کو صہ سے اور ۳ کو لر سے . . . اور ن کو مو سے
ان دونو طریقون سے جو استخراج ہوتا ہے اونمین دونو اعداد زیرین کے تبادل کی
تعداد ایک ہی ہوتی ہی اور اسیواسطی ایک ہی علامت ہر جز ترکیبی کے اول بموجب قاعدہ

دفعہ ۳۳۹ کے　مقرر ہوتی ہے

(۳۴۳) اگر متواتر افقی صفون کو عمود صفون سی بدل دین تو مقطع کی قیمت مین کچہ فرق نہیں پڑتا

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1\text{و}_1 & \text{ا}_1\text{و}_2 & \cdots & \text{ا}_1\text{و}_\text{ن} \\ \text{ا}_2\text{و}_1 & \text{ا}_2\text{و}_2 & \cdots & \text{ا}_2\text{و}_\text{ن} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \text{ا}_\text{ن}\text{و}_1 & \text{ا}_\text{ن}\text{و}_2 & \cdots & \text{ا}_\text{ن}\text{و}_\text{ن} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ا}_1\text{و}_1 & \text{ا}_2\text{و}_1 & \cdots & \text{ا}_\text{ن}\text{و}_1 \\ \text{ا}_1\text{و}_2 & \text{ا}_2\text{و}_2 & \cdots & \text{ا}_\text{ن}\text{و}_2 \\ \text{ا}_1\text{و}_\text{ن} & \text{ا}_2\text{و}_\text{ن} & \cdots & \text{ا}_\text{ن}\text{و}_\text{ن} \end{vmatrix}$$

اسواسطے کہ یہہ ظاہر ہی موافق دفعہ ۳۴۰ کے اجزاء ترکیبی مقطعات کی برابر قیمت کی ہوتے ہین
اور دفعہ ۳۴۲ کے موافق اونکی ایک ہی علامتین ہوتی ہین

(۳۴۴) اگر دو افقی صفین یا دو عمودی صفین باہم بدل جائیں تو علامت مقطع کی تبدیل ہوگی
فرض کرو کہ س مقطع معلوم کو تعبیر کرتا ہی اور سَ اوس مقطع کو جو تبادل سے پیدا ہوتا ہے
تو اجزاء ترکیبی س اور سَ مین ایک ہی قیمت کی ہین اب صرف اونکی علامت ہی کا فیصلہ
کرنا ہی سَ مین اول جزء ترکیبی س کی اول جزو ترکیبی سی اسطرح استخراج ہوسکتا ہے
کہ دوسری اعداد زیرین مین سی دو کا تبادل کردین اور ان اجزاء ترکیبی کی دونو مقطعات
مین مختلف علامتین ہونگین تو ایک جزء ترکیبی سَ مین جو سَ کی اول جز ترکیبی کے م تبادل سے
دوسرے اعداد زیرین کی پیدا ہوتا ہی وہ اول جز ترکیبی سی س کی م + ۱ تبادل سی پیدا ہوسکتا ہی
اور اسیواسطی وہ س اور سَ مین مختلف العلامت ہوگا

(۳۴۵) اگر دو افقی صفین یا دو عمودی صفین متطابق ہون تو مقطعات معدوم ہوجائینگے
وجہ اسکی یہہ ہی کہ دو افقی صفین یا دو عمودی صفین جب باہم بدلین تو ایک مقطع س سے سَ
بدل کر ہو جایگا لیکن اگر دو افقی صفین یا عمودی صفین متطابق ہون تو ان افقی صفون
یا عمودی صفون کا تبادل کچہ تصرف مقطع مین نہین کریگا اور اسیواسطی س = - س
اور اسیواسطے س = ۰

(۳۴۶) جب تمام اجزاء ذاتی سوا ایک کی کسی ایک افقی صف میں یا عمودی صف میں معدوم ہو جائیں تو مقطع کی تحویل اوس حاصل ضرب کی طرف ہو جاتی ہے جو رتبہ مابعد کے مقطع اور اوس جز ذاتی کے ضرب دینے سے پیدا ہوتا ہے

مثلاً اس مقطع پر خیال کرو

$$\begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 & س_1 & د_1 \\ ا_2 & ب_2 & س_2 & د_2 \\ ا_3 & ب_3 & س_3 & د_3 \\ 0 & 0 & س_4 & 0 \end{vmatrix}$$

اکیلی افقی صفوں کی تین متواتر تبادلوں سے ہم اوس افقی صف کو جسمیں س۴ ہے سب سے اوپر کی افقی صف میں لاتے ہیں اور اکیلی عمودی صفوں میں دو متواتر تبادلوں سے ہم اوس عمودی صف کو جسمیں س۴ ہے اول عمودی صف میں لاتے ہیں پس بموجب دفعہ ۳۴۴ کے

$$\begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 & س_1 & د_1 \\ ا_2 & ب_2 & س_2 & د_2 \\ ا_3 & ب_3 & س_3 & د_3 \\ 0 & 0 & س_4 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} = \\ \pm \end{matrix} (-1)^5 \begin{vmatrix} س_4 & 0 & 0 & 0 \\ س_1 & ا_1 & ب_1 & د_1 \\ س_2 & ا_2 & ب_2 & د_2 \\ س_3 & ا_3 & ب_3 & د_3 \end{vmatrix}$$

اول جز ترکیبی بائیں طرف س۴ ا۱ ب۲ د۳ ہے اور اور اجزاء ترکیبی ایسے اعداد زیرین کے ترتیبوں سے حاصل ہو سکتے ہیں لیکن س۴ صرف ایک جز ذاتی ہے جسکا عدد زیرین ۴ ہے جو صفر نہیں ہے اور صرف س۴ ہی ہر یک جز ترکیبی کا جز ضربی ہوگا جو معدوم نہیں ہوتا اور اور جز ضربی ا۱ ب۲ د۳ سے اعداد زیرین ۱ و ۲ و ۳ کے ترتیبوں سے منتظم ہوتی ہیں پس اصل مقطع کی تحویل

$$(-1)^5 س_4 \times \begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 & د_1 \\ ا_2 & ب_2 & د_2 \\ ا_3 & ب_3 & د_3 \end{vmatrix}$$

طریقہ اثبات کا یہی ہی خواہ مقطع مفروضہ کا کچہ ہی رتبہ ہو

اس مثال مین جو علامت منفی کی (-۱)^۵ سے پیدا ہوتی ہے اگر ہم چاہین تو اوسی اسطرح دور کر سکتی ہین کہ تیسری رتبہ کی مقطع مین دو افقی صفون کو یا دو عمودی صفون کو متبدل کر دین

(۳۴۷) ن رتبی کی مقطع کی صف افقی جو سب سی اوپر ہو وہ ن - ۱ متواتر تبادل سی دو افقی صفون کی سب سی نیچی اسکتی ہی اور علی ہذا القیاس اول عمودی صف اخر عمودی صف کے ن - ۱ متواتر تبادل سی دو عمودی صفون کے بن سکتی ہی انمین سی ہر ایک کو دور تبادل کہتی ہین اور بعض اوقات عمودی یا افقی صفون کو زیادہ بالقرینہ بنانی کی واسطی اسمین اسانی ہوتی ہے کہ تبادل مفروضہ افقی صفون یا عمودی صفون کا دور تبادل کی تسلسل سی حاصل کرین

مثال گذشتہ مین ہم س۴ کو جس جگہ قائم کرنا چاہتی تہی اوس جگہ اسطرح لے ائی کہ تین متواتر دور تبادل افقی صفون کی اور دو متواتر دور تبادل عمودی سطرون کی لئی پس اصل مقطع کے واسطی یہہ متواتر صورتین حاصل ہوئین

(-۱)^۳	ا۲ وب۲ وس۲ ود۲	(-۱)^۶	ا۳ وب۳ وس۳ ود۳	(-۱)^۹	۰ و۰ وس۴ و۰
	ا۳ وب۳ وس۳ ود۳		۰ و۰ وس۴ د۰		ا۱ وب۱ وس۱ ود۱
	۰ و۰ وس۴ و۰		ا۱ وب۱ وس۱ ود۱		ا۲ وب۲ وس۲ ود۲
	ا۱ وب۱ وس۱ ود۱		ا۲ وب۲ وس۲ ود۲		ا۳ وب۳ وس۳ ود۳

(-۱)^۱۲	۰ وس۴ و۰ و۰	(-۱)^۱۵	س۴ و۰ و۰ و۰	(-۱)^۱۵ س۴	د۱ وا۱ وب۱
	ب۱ وس۱ ود۱ وا۱		س۱ ود۱ وا۱ وب۱		د۲ وا۲ وب۲
	ب۲ وس۲ ود۲ وا۲		س۲ ود۲ وا۲ وب۲		د۳ وا۳ وب۳
	ب۳ وس۳ ود۳ وا۳		س۳ ود۳ وا۳ وب۳		

(۳۴۸) ہر ایک مقطع ہمیشہ ایک اعلی رتبہ کی مقطع کی صورت مین بیان ہو سکتا ہے مثلاً بموجب دفعہ ۳۴۷ کے

(۳۵۰) اگر ایک افقی صف یا عمودی صف مین ہر ایک جزو ذاتی کسی مقدار معلوم مین ضرب کیا ہے تو وہ مقطع اوس مقدار مین ضرب کیا جاتا ہے

فرض کرو کہ س = لے دا لے دا + لے دم لے دم + ۰۰ لے دن لے دن

اور ے دین افقی صف مین ہر ایک رقم ع مین ضرب دیجاے تو ہم ع لے دا کو لے دا اور ع لے دم کو لے دم کی جگہ اور علی ہذا القیاس رکھین تو مقطع جدید کے واسطے ع گنا نتیجہ اول کا حاصل ہوگا

اور اسیطرح اس مسئلہ کو ثابت کرسکتے ہین اگر عمودی صف کی ہر ایک رقم کسی مقدار معلوم مین ضرب کیا ہے

(۳۵۱) اگر ایک افقی صف یا عمودی صف مین ہر ایک جزو ذاتی مجموعہ م رقمون کا ہو تو مقطع کو مجموعہ م مقطعات کا خیال کرسکتے ہین

مثلاً فرض کرو کہ ے دین افقی صف کا ہر جزو ذاتی مجموعہ م ارقام کا ہو اور فرض کرو کہ

لے دا = ع۱ + ق۱ + ر۱ + ۰۰۰

لے دم = ع۲ + ق۲ + ر۲ + ۰۰۰

لے دس = ع۳ + ق۳ + ر۳ + ۰۰

تو س = لے دا لے دا + لے دم لے دم + ۰ ۰ + لے دن لے دن

= ع۱ لے دا + ع۲ لے دم + ۰ ۰ + عن لے دن

+ ق۱ لے دا + ق۲ لے دم + ۰ ۰ + قن لے دن

+ ر۱ لے دا + ر۲ لے دم + ۰ ۰ + رن لے دن

پس س کو مجموعہ ان م مقطعات کا خیال کرسکتے ہین جنمین جداگانہ ے دین افقی صفین یہہ ہین

ع۱ و ع۲ ۰ ۰ عن

ق۱ و ق۲ ۰ ۰ قن

ر۱ و ر۲ ۰ ۰ رن

(۳۵۲) اب یہہ بتلائینگے کہ لے دوک کے امثال کسی مقطع مین خود مقطع کی طرح نمایان ہوتے ہین مقطع کے

اون اجزاء ترکیبی کے حاصل کرنی کی لئی جنمین ایک خاص جز ذاتی لے دک ملتف ہو اور وہی فقط ہو تمام اجزاء ذاتی کو ی وین صف افقی مین صفر سوا لے وک کے فرض کرو تو لے وک کے جگہ ا رکہنی سے ہم کو امثال مطلوب حاصل ہونگے

مثلاً

لے وک = | ا١و١ ... ا١وک-١ ا١وک+١ ... ا١ون
لے-١و١ ... لے-١وک-١ لے-١وک دلے-١وک+١ ... لے-١ون
. . . ١ .
لےو١ ... لے+١وک-١ لے+١وک لے+١وک+١ ... لے+١ون
. . . .
ان و١ ... ان وک-١ ان وک ان وک+١ ... ان ون

پس لے دک مقطع صورت مین نمایاں ہوا اور وہ ن رتبہ کا ہی لے وک کے قیمت بر بغیر کسی تر ہونی کے ہم ۔ بجای ہر ایک جز ذاتی کی ک وین صف عمودی سوا ا کے رکہہ سکتی ہین

بموجب دفعات ۲۴۶ ۳ یا دفعہ ۲۴۳ کے ہم لے وک کو مقطع (ن -۱) رتبے کا بنا سکتی ہین

پس ہم دفعہ ۲۴۷ کی ترکیب اختیار کرکے ے -۱ مدور تغیر ک -۱ افقی صفوں مین اور ک -۱ مدور تغیر عمودی صفوں مین کر سکتی ہین اسیواسطے

لے دک = مر × | لے+١وک+١ ... لے+١ون دلے+١و١ ... لے+١وک-١
. . . .
ان وک+١ ... ان ون ... ان و١ ... ان وک-١
ا١وک+١ ... ا١ون ا١و١ ... ا١وک-١
لے-١وک+١ ... لے-١ون لے-١و١ ... لے-١وک-١

اسمین مر = $(-١)^{(ے-١+ک-١)(ن-١)} = (-١)^{(ے+ک)(ن-١)}$

(۲۵۳) دفعات ۲۴۹ و ۲۵۲ کی استعانت سی ن رتبہ کی مقطع کو اسطرح بیان کر سکتی ہین کہ ف

مجموعہ اون ن رقموں کا ہو جسمین سی ہر یک حاصل ضرب ایک جز ذاتی اور (ن-۱) رتبی کی مقطع کا ہو اور (ن - ۱) وین رتبی کی مقطعات کا بیان اسطرح ہو سکتا ہی اور اس عمل کو جہان تک چاہو جاری رکھو

مثلاً

ا۱ ب۱ س۱ د۱	= ا۱	ب۲ س۲ د۲	− ب۱	س۲ د۲ ا۲	+ س۱	د۲ ا۲ ب۲	− د۱	ا۲ ب۲ س۲
ا۲ ب۲ س۲ د۲		ب۳ س۳ د۳		س۳ د۳ ا۳		د۳ ا۳ ب۳		ا۳ ب۳ س۳
ا۳ ب۳ س۳ د۳		ب۴ س۴ د۴		س۴ د۴ ا۴		د۴ ا۴ ب۴		ا۴ ب۴ س۴
ا۴ ب۴ س۴ د۴

= ا۱ { ب۲ | س۳ د۳ / س۴ د۴ | + س۲ | د۳ ب۳ / د۴ ب۴ | + د۲ | ب۳ س۳ / ب۴ س۴ | }

− ب۱ { س۲ | د۳ ا۳ / د۴ ا۴ | + د۲ | ا۳ س۳ / ا۴ س۴ | + ا۲ | س۳ د۳ / س۴ د۴ | }

+ س۱ { د۲ | ا۳ ب۳ / ا۴ ب۴ | + ا۲ | ب۳ د۳ / ب۴ د۴ | + ب۲ | د۳ ا۳ / د۴ ا۴ | }

− د۱ { ا۲ | ب۳ س۳ / ب۴ س۴ | + ب۲ | س۳ ا۳ / س۴ ا۴ | + س۲ | ا۳ ب۳ / ا۴ ب۴ | }

(۳۵۷) اب ہم اس مضمون کا ایک مطلب عظیم لکہتی ہین اور وہ مقطعات کی ضرب سی متعلق ہے فرض کرو کہ رموز کی دو سلک ہون یعنی

ا۱، ۱ . . . ا۱، ع و —

ان، ۱ . . . ان، ع و

ب۱، ۱ . . . ب۱، ع و

. . .

بن، ۱ . . . بن، ع و

ان سی فرض کرو کہ ایک تیسری سلک رموز بنائی گئی

$\text{س}_{1}\text{و}_{1}$ ۔ ۔ ۔ $\text{س}_{1}\text{و}_{ن}$

$\text{س}_{ن}\text{و}_{1}$ ۔ ۔ ۔ $\text{س}_{ن}\text{و}_{ن}$

ان رموز کا فیصلہ قطعی اس ارتباط عام سے ہوگا کہ

$\text{س}_{ی}\text{و}_{ک} = \text{ل}_{ی}\text{و}_{1}\ \text{ب}_{ک}\text{و}_{1} + \text{ل}_{ی}\text{و}_{2}\ \text{ب}_{ک}\text{و}_{2} + \ldots + \text{ل}_{ی}\text{و}_{ع}\ \text{ب}_{ک}\text{و}_{ع}$

فرض کرو کہ $\text{ح} \pm \text{س}_{1}\text{و}_{1}\ \text{س}_{2}\text{و}_{2} \ldots \text{س}_{ن}\text{و}_{ن}$ کو س تعبیر کرتا ہے تو ہم نتایج ذیل ثابت کرینگے

(۱) فرض کرو کہ ع چھوٹا بہ نسبت ن کے ہے تو س = ۰

(۲) فرض کرو کہ ع = ن تو س برابر حاصل ضرب اون دو مقطعات کے ہوگا جو دو سلک رموز سے کہ موافق اپنی اوسی ترتیب کے لیجائیں شامل ہوتے ہیں

(۳) فرض کرو کہ ع بڑا بہ نسبت ن کی ہی تو س برابر ہوگا اون ازواج مقطعات کے حاصل ضربوں کی مجموعہ کی جسمین سی ہر زوج مقطعات کا اسطرح بناہی کہ ن عمودی صفین ایک معلوم سلک رموز سی ایک مقطع مین لین اور اسکی مطابق ن عمودی صفین دوسرے معلوم سلک رموز مین سی دوسرے مقطع کی لئی لین

اول جز ترکیبی س کا $\text{س}_{1}\text{و}_{1}\ \text{س}_{2}\text{و}_{2} \ldots \text{س}_{ن}\text{و}_{ن}$ ہی اور اسکی قیمت یہہ ہے کہ

$(\text{ح}\ \text{ا}_{1}\text{و}_{ر}\ \text{ب}_{1}\text{و}_{ر})\ (\text{ح}\ \text{ا}_{2}\text{و}_{ص}\ \text{ب}_{2}\text{و}_{ص})\ (\text{ح}\ \text{ا}_{3}\text{و}_{ط}\ \text{ب}_{3}\text{و}_{ط}) \ldots$

اسمین اول جز ضربی مین ح اوس مجموعہ کو تعبیر کرتا ہی جو بلحاظ ر کے لیا جاے اور دوسرے جز ضربی مین ح اوس مجموعہ کو تعبیر کرتا ہی جو بلحاظ ص کی لیا جاے اور تیسرے جز ضربی مین ح اوس مجموعہ کو تعبیر کرتا ہی جو بلحاظ ط کے لیا جاے اور علی ہذا القیاس اور یہہ مجموعی الیسی ع تک پہلتی ہین اور یہہ دونوا وسمین داخل ہین

پس حاصل ضرب اس جملہ کے قیمتون کے مجموعہ لینی سے دریافت ہوسکتا ہے کہ

$\text{ا}_{1}\text{و}_{ر}\ \text{ا}_{2}\text{و}_{ص} \ldots\ \text{ب}_{1}\text{و}_{ر}\ \text{ب}_{2}\text{و}_{ص}\ \text{ب}_{3}\text{و}_{ط} \ldots$

جسمین کہ ر و ص و ط ۔ ۔ کی تمام صحیح قیمتین اسی ع تک لیجائین

اب ہم اس مجموعہ کو

$\text{ح}_{\text{ر و ص و ط} \ldots}\ (\text{ا}_{1}\text{و}_{ر}\ \text{ا}_{2}\text{و}_{ص}\ \text{ا}_{3}\text{و}_{ط} \ldots\ \text{ب}_{1}\text{و}_{ر}\ \text{ب}_{2}\text{و}_{ص}\ \text{ب}_{3}\text{و}_{ط} \ldots)$

اور یہ لئے اور اجزاء ترکیبی سی اسطرح حاصل ہو سکتی ہین کہ دوسرے اعداد زیرین کی ترتیبین لین اور مناسب علامت مقرر کرین اب تمام قیمت س ے ول سی یہہ استخراج ہوتا ہی کہ رمز س کے دوسری عداد زیرین کو بدلنی سی کوئی تغیر بعز ا کے اعداد زیرین مین نہین آتا لیکن رمز ب کے اول اعداد زیرین بدل جاتی ہین اور صرف یہی بدلتی ہین اسی ہم ایک نتیجہ نکالتی ہین جو اسطرح تعبیر ہو سکتا ہے

س = ح ر وص وط . . . (ا، اور ا۲ وص ا۳ وط . . . ح ± ب، اور ب۲ وص ب۳ وط . .)

یہان ح ± ب، اور ب۲ وص ج۳ وط . . . سی ق رتبی کا مقطع دوسری معلوم سلک رموز کے خاص افقی صفون کی لینی سی بنتا ہی اور ح کا مجموع اول اعداد زیرین کی تغیرات مین دفعہ ۳۴۲ کو دیکھو اس مقطع کو ن سی تعبیر کرتی ہین اب اول فرض کرو کہ ع چھوٹا بہ نسبت ن کے ہی تو اعداد زیرین ر وص وط . . . تعداد مین ن ہین اور کوئی اونین سی ن سے بڑا نہین ہے اسی یہہ مستنبط ہوتا ہی کہ اونمین ہمیشہ دو یا زیادہ دو سی ایک ہی قیمت رکھتی ہین پس ن ہمیشہ بموجب دفعہ ۳۴۵ کے معدوم ہوتا ہے اور سیواسطی س معدوم ہوتا ہے

دوم فرض کرو کہ ع = ن تو نظم اعداد زیرین کا ر ص ط . . . ایک ترتیب ن رموز ا و ۲ . . ن کی ہوگی اور وہ کچہ نہ ہوگی جب تک ق کو معدوم نہ کرین اب متواتر مختلف ترتیبون کی لینی سی علامت ق کی تبدیل ہوگی مگر اوسکی قیمت بموجب دفعہ ۳۴۴ کے نہین بدلیگی پس قیمت س کی تحویل اوس حاصل ضرب کی طرف ہوگی جو اوس مقطع کو دوسرے معلوم سلک رموز سی بنانا چاہئی مجموعہ تمام اجزاء ترکیبی مین جو ح ± ا، ا، ا۲ و۲ . . ان دن تعبیر ہوتی مین ضرب دینی سی پیدا ہوا سمین ح کا مرجع دوسرے اعداد زیرین کے تغیرات مین اسیواسطی جب ع = ن

$$
س = \begin{vmatrix} ا_{1}\ و_{1} & \cdots & ا_{1}\ و_{ن} \\ ا_{ن}\ و_{1} & \cdots & ا_{ن}\ و_{ن} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} ب_{1}\ و_{1} & \cdots & ب_{1}\ و_{ن} \\ ب_{ن}\ و_{1} & \cdots & ب_{ن}\ و_{ن} \end{vmatrix}
$$

اب آخر فرض کرو کہ ع بڑا بہ نسبت ن کی ہی تو نظم اعداد زیرین رص ط . . . اجتماع ن اعداد کی ع اعداد ا و ۲ . . . ع مین سی ہوگی اور تعداد ایسی اجتماعون کی

$\frac{\lfloor ع}{\lfloor ن \lfloor ع - ن}$ ہوگی فرض کرو کہ ق کے معنی موافق سابق کے ہون ب کو اسی بلانی مین جو ق ہو جای اوسکو ع سی تعبیر کرو اسی معلوم ہوا کہ موافق دوسری صورت کی ہم کو س کے ایک رقم کی واسطی ع ق حاصل ہوگا اور یہہ اسطرح پیدا ہوتا ہے کہ $\frac{\lfloor ع}{\lfloor ن \lfloor ع - ن}$ مین سی ممکن محدود اجتماع منتخب کرین اسیواسطی جب ع بڑا بہ نسبت ن کے ہے تو ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہی کہ س = ح ع ق اسمین ح مجموعہ $\frac{\lfloor ع}{\lfloor ن \lfloor ع - ن}$ ارقام کا ہے جو ممکن اجتماعون سی پیدا ہوتا ہے

(۳۵۵) دفعہ گذشتہ کی دوسری صورت مین ہم دیکھتی ہین کہ حاصل ضرب ن رتبی کی دو مقطعات کا ن ہی رتبہ کی مقطع مین نمایان ہو سکتا ہی اور علی ہذا القیاس حاصل ضرب ن رتبی کی تین مقطعات کا ن ہی رتبہ کی مقطع مین نمایان ہو سکتا ہی اسواسطی کہ اول ہم ن رتبی کی دو مقطعات کی حاصل ضرب کو ن رتبی کے مقطع صورت مین نمایان کر سکتی ہین اور اس جدید مقطع اور اصل مقطعات مین سے تیسرے مقطع کو ن رتبی کی مقطع کی صورت مین ظاہر کر سکتی ہین پس ہم دیکھتی ہین کہ حاصل ضرب تعداد مقطعات کا جو ایک ہی رتبی کے ہون اوسی رتبی مین نمایان ہو سکتا ہے اسی معلوم ہوا کہ اگر حاصل ضرب مقطعات کا خواہ کسی رتبی کے ہون اور کتنی ہون اوسی رتبے کے مقطع کے صورت مین اور اجزا ضربی کی اعلی رتبہ کے مقطع کے صورت مین بہی نمایان ہو سکتا ہی اسواسطی کہ بموجب دفعہ ۳۴۸ کی اور سب مقطعات مثل اعلی رتبے کے مقطع کی بن سکتی ہین اور جب یہہ بن جائین تو ان مقطعات کا حاصل ضرب اوسے رتبے کے مقطع کی صورت مین بن سکتی ہین

(۳۵۶) فرض کرو کہ ہم کو حاصل ضرب دو مقطعات کا بنانا ہے

کا کہتے ہیں

(۳۵۸) ایک نظم کا مقطع جو متکافی نظم مفروضہ ن رموز کا ہو وہ (ن-۱) وین قوت کا مقطع نظم مفروضہ کا ہوتا ہے

اگر ہم ان مقطعات کو ضرب دیں

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_{\text{۱و۱}} & \cdots & \text{ا}_{\text{۱ون}} \\ \text{ا}_{\text{نو۱}} & \cdots & \text{ا}_{\text{نون}} \end{vmatrix}$$

اور

$$\begin{vmatrix} \text{ا}'_{\text{۱و۱}} & \cdots & \text{ا}'_{\text{۱ون}} \\ \text{ا}'_{\text{نو۱}} & \cdots & \text{ا}'_{\text{نون}} \end{vmatrix}$$

تو حاصل ضرب کے واسطے یہہ حاصل ہوگا

$$\begin{vmatrix} \text{س}_{\text{۱و۱}} & \cdots & \text{س}_{\text{۱ون}} \\ \vdots & & \vdots \\ \text{س}_{\text{نو۱}} & \cdots & \text{س}_{\text{نون}} \end{vmatrix}$$

اسمیں $\text{س}_{\text{ر،ک}} = \text{ا}_{\text{ر،۱}}\,\text{ا}'_{\text{ک،۱}} + \text{ا}_{\text{ر،۲}}\,\text{ا}'_{\text{ک،۲}} + \cdots + \text{ا}_{\text{ر،ن}}\,\text{ا}'_{\text{ک،ن}}$

اسی معلوم ہوا کہ موافق دفعہ ۳۴۹ کے اخر مقطع کی اجزاء داخلی کی قیمت س ہوگی اگر ر اور ک برابر ہیں یا صفر ہوگی اگر ر اور ک غیر مساوی ہیں پس یہہ مقطع اپنی اول جزء ترکیبی $\text{س}_{\text{۱و۱}}\,\text{س}_{\text{۲و۲}} \cdots \text{س}_{\text{نون}}$ یعنی $\text{س}^{\text{ن}}$ کی طرف تحویل ہوتی ہے اسواسطے

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_{\text{۱و۱}} & \cdots & \text{ا}_{\text{۱ون}} \\ \text{ا}_{\text{نو۱}} & \cdots & \text{ا}_{\text{نون}} \end{vmatrix}\ \text{س} = \text{س}^{\text{ن}}$$

اسواسطے

$$\begin{vmatrix} \text{ا}'_{\text{۱و۱}} & \cdots & \text{ا}'_{\text{۱ون}} \\ \text{ا}'_{\text{نو۱}} & \cdots & \text{ا}'_{\text{نون}} \end{vmatrix} = \text{س}^{\text{ن-۱}}$$

(۳۵۹) فرض کرو کہ ایک ن رتبہ کا مقطع ہے اور ر رمز کے مربع میں جو اد س کو تعبیر کرے

م افقی صفین اور م عمودی صفین معدوم ہون اور باقی رموز کو سر کا کر ایک رمز کے جدید مربع مین لکھین جو ن - م رتبی کا مقطع ہی تو اس مقطع کو مقطع جزئیہ یا مقطع اصغر بلحاظ اصلی مقطع کی کہتی ہین اور رموز جو مشترک افقی اور عمودی صفون مین ہوتی ہین اون سے ایک مربع رمز کا بنیگا جو ایک مقطع م رتبی کا ہوگا یہہ بہی مقطع جزئیہ یا مقطع اصغر ہے ان دو مقطعات جزئیہ یا اصغر کو ایک دوسری کا متمم کہتے ہین

(۳۶۰) ن رتبی کی مقطع کو س تعبیر کرتا ہی م رتبہ کا مقطع جزئیہ نظم متکافیہ کا تعداد اً برابر ہوتا ہی حاصل ضرب م - ۱ اور اصل نظم کے مقطع جزئیہ متمم کے

فرض کرو کہ ق ح د ... ر ص ایک ترتیب اعداد ا و ۲ ... ن کو تعبیر کرا وے و ک و ... ل و مو دوسری ترتیب کو تعبیر کرین اور ق ح ... اور ے و ک ... او مین ہر ایک کو م عددون کی جماعت فرض کرو اور ر و ص ... اور لو و مو ... کو ن - م عددون کی جماعتین فرض کر دیں

اق وے	وا ق وک ...
اح وے	وا ح وک

مقطع جزئیہ نظم متکافیہ کا م رتبہ کا ہے اسکو ص سے تعبیر کرو

اب	اق وے وا ق وک ...	اق ولو	وا ق ومو ...	
	اح وے وا ح وک ...	اح ولو	وا ح ومو ...	= مر س
	... ...	...	...	
	ار وے ذ ار وک ...	ار ولو	ذ ار ومو	
	اص وے وا ص وک ...	اص ولو	وا ص ومو ...	

مر اسمین +۱ ہی اگر ترتیبین ق ح د ... ر ص اور ے و ک ... لو و مو کی ایک ہی نوع کی ہون اور -۱ ای اگر اونکی ترتیبین مختلف نوع کی ہون

اب ہم ان دو مقطعات کا حاصل ضرب دریافت کرتے ہین بموجب دفعہ ۳۴۸ س کی اجزا ذاتی کے ازدیاد سی مقطع ص کا ن رتبہ پر صعود کر سکتا ہی پس م بجای ص کے

مقطع ذیل لکھتے ہین

ا ن وے و ا ن وک ... ا ن ولو ا ن دمو ...
اح وے و اح وک ... اح ولو اح دمو ...
ب ر وے و ب ر وک ... ب ر ولو ب ر دمو ...
ب ص وے و ب ص وک ... ب ص ولو ب ص دمو ...

اسمین سب مع اعداد زیرین کی جن اجزاء ذاتی کو تعبیر کرتا ہی صفر مقرر کی گئی ہین مگر وہ اجزاء ذاتی مستثنی ہین جو قطر مین لکھی ہین وہ سب برابر واحد کے فرض کئی گئی ہین

اب حاصل ضرب ص اور مرس کا بناء تو وہ ایک جدید مقطع ن رتبے کا ہوگا فرض کرو کہ اجزاء ذاتی اس جدید مقطع کو حرف س مع دو اعداد زیرین کے تعبیر کرے اور ان اعداد زیرین مین سی موافق دستور کی ایک افقی صف کو اور دوسرا عمودی صف کو تعبیر کرے بموجب دفعہ ۳۵۶ کی چار طریقے ہین جنسی ہم حاصل ضرب ص اور مرس کے اجزاء ذاتی کو دریافت کر سکتے ہین انمین سی اول طریقہ کو ہم اختیار کرتے ہین اس طریقہ کے موافق س ع ق اسطرح حاصل ہوتا ہی کہ ص کی ع وین افقی صف کے اجزاء ذاتی کو جدا گانہ مرس کی ق وین افقی صف مین ضرب دین تو

س ا و ا = ا ن وے ا ن وے + ا ن وک ا ن وک + ... + ا ن ولو ا ن ولو + ا ن دمو ا ن دمو + ..

س ا و ۲ = ا ن وے اح وے + ا ن وک اح وک + ... + ا ن ولو اح ولو + ا ن دمو اح دمو + ..

اسیواسطی بموجب دفعہ ۳۴۹ کے س ا و ا دس ۲ و ۲ ... س م دم برابر س کے حاصل ہونگے اور باقی اور اجزاء ذاتی اوس مقطع کے م افقی صفون کے جو ص اور مرس سی حاصل ہوتا ہے صفر ہونگے (م + ۱) وین صف مین اول رقم کے واسطے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

س م + ۱ و ا = ب ر وے ا ن وے + ب ر وک ا ن وک + ... + ب ر دمو ا ن دمو + ... = ا ن دلو

اسواسطی کہ ب مع اعداد زیرین کے جو واقع ہوتی ہین جن رموز کو تعبیر کرتا ہے

وہ صفر ہین مگر ب رد لو واحد ہی اور اسیطرح (م + ۱) افقی صف ہین دوسرا رقم
یہہ ہم کو حاصل ہوتی ہے کہ

س م + ۱ د م = لح و لو

اسیطرح عمل کرنے سی ہم کو یہہ دریافت ہوگا کہ (م + ۱) وین افقی صف حاصل ضرب

ص اور مرس مین وہی ہی جو مرس مین (م + ۱) وین صف ہے
علی ہذا القیاس (م + ۲) وین افقی صف حاصل ضرب مین وہی ہے جو (م + ۲) وین عمودی صف مرس مین ہے،
بس مقطع جو ساوی لہ ص مرس کا ہو بموجب دفعہ ۳۴۶ کے تحویل اوس حاصل ضرب کی
طرف ہو سکتا ہی جو مرم اور ذیل کے (ن - م) رتبہ کے مقطع کو ضرب دینے سے پیدا ہوتا ہے

لرد لو لرد مود . . .

لص و لو لص و مود . . .

ص = مرم - ۱ | لرد مود لرد لو و . . . |
| لص و لو لص و مو . . . |

(۳۶۱) امثلہ ذیل طالب علم ثابت کری امثلہ (۴) و (۵) (۶) مین ہم نی وہ مقطعات رکھی ہین
جنکے اجزاء ذاتی خود مقطعات ہین

(۱)

۰	و سہ	و صہ	و لر
سہ و	۰	و لر۱	و صہ۱
صہ و	لر۱ و	۰	و سہ۱
لر و	صہ۱ و	سہ۱ و	۰

$= سہ^2 سہ_1^2 + صہ^2 صہ_1^2 + لر^2 لر_1^2 + ۲ سہ سہ_1 صہ صہ_1 - ۲ سہ سہ_1 لر لر_1 - ۲ صہ صہ_1 لر لر_1$

(۲)

۰	و سہ	و صہ	و لر
- سہ و	۰	و لر۱	و صہ۱
- صہ و	- لر۱ و	۰	و سہ۱
- لر و	- صہ۱ و	- سہ۱ و	۰

$= (سہ سہ_1 - صہ صہ_1 + لر لر_1)^2$

(۳)

| مر و سہ و صہ و لر |
| -سہ و مر و لر₁ و صہ₁ |
| -صہ و -لر₁ و مر و سہ₁ |
| -لر و -صہ₁ و -سہ₁ و مر |

= مر⁴ + مر² (سہ² + صہ² + لر² + سہ₁² + صہ₁² + لر₁²) + (سہ سہ₁ - صہ صہ₁ + لر لر₁)²

(۴)

| س و ح | ح و ا | | ح و ا | ن و ھ | | ح و ا | ف و ھ | | ا و ھ | ح و ب | = ا | ا و ھ و ح | ھ و ب و ف | ح و ف و س |

(۵)

| ح و ا | ن و ھ | | ف و س | ھ و ح |
| ا و ھ | ھ و ب | | ھ و ب | ح و ف |

= ھ | ا و ھ و ح | ھ و ب و ف | ح و ف و س |

(۶)

ب و ف	ف و س		ف و س	ھ و ح		ھ و ب	ح و ف
ف و س	ھ و ح		س و ح	ح و ا		ح و ا	ن و ھ
ھ و ب	ح و ف		ح و ا	ن و ھ		ا و ھ	ھ و ب

= مجذور | ا و ھ و ح | ھ و ب و ف | ح و ف و س |

(۷)

| ا و ب | ا₁ و ب₁ | | س و د | س₁ و د₁ | + | ب و س | ب₁ و س₁ | | ا و د | ا₁ و د₁ | + | س و ا | س₁ و ا₁ | | ب و د | ب₁ و د₁ | = ۰

ستائیسواں باب

استعمال مقطعات

(۳۶۲) فرض کرو ن مقادیر مجهول لا۱ و لا۲ ۰۰۰ لان کی قیمتین ان ن
مساواتون سی دریافت کرنے هین

ا۱ لا۱ + ا۱و۲ لا۲ + ا۱و۳ لا۳ + ۰۰۰ + ا۱ون لان = لو۱

ا۲و۱ لا۱ + ا۲و۲ لا۲ + ا۲و۳ لا۳ + ۰۰۰ + ا۲ون لان = لو۲

ان و۱ لا۱ + ان و۲ لا۲ + ان و۳ لا۳ + ۰۰۰ + ان ون لان = لون

فرض کرو کہ س مقطع ح ± ا۱و۱ ا۲و۲ ۰۰۰ ان ون کو تعبیر کرتا هی اور اے وک امثال
اے وک کو س مین تعبیر کرتی هین تو قیمتین مقادیر مجهول کی اس صورت قانونی سے معلوم هونگین

∴ س لاک = لو۱ اے وک + لو۲ ا۲ وک + ۰۰۰ + لون ان وک

اسمین ک کوئی قیمت درمیان ۱ اور ن کے هی اور یهه دونو اونمین داخل هین
اسواسطی کہ معلوم مساواتون کو جداگانہ ا۱ وک و ا۲ وک ۰۰۰ ان وک مین ضرب دو
اور حاصل ضربون کو جمع کرو تو امثال لاک کے

ا۱ وک اے وک + ا۲ وک ا۲ وک + ۰۰۰ + ان وک ان وک

یهه بموجب دفعه ۳۴۹ کے برابر س کے هین اور امثال لا۱ کے

ا۱ وے ا۱ وک + ا۲ وے ا۲ وک + ۰۰۰ + ان وے ان وک

اور یهه بموجب دفعه ۳۴۹ کے صفر هے

اوس صورت قانونی کو جسے لان معلوم هو اسطرح لکہ سکتی هین

س لاک = ص

اسمین ص ایک مقطع هی یعنی وہ مقطع هی جو اسطرح بنتا هی کہ س سے ک وین افقی صفین س کے
ساقط کرین اور اونکی جگہ وہ عمودی صف رکهین جو لو۱ و لو۲ ۰۰۰ لو ن سی مرتب هوتی هے

(۳۶۳) فرض کرو کہ مقطع س فنا هوتا هی تو قیمتین مقادیر مجهول کی غیر متناهی هوجائینگی
اسی یهه معلوم هوگا کہ مساواتین معلوم غیر مطابق هین جبر مقابلہ کا پندرهوان باب دیکهو

(۳۶۴) فرض کرو کہ لو۱ لو۲ ۔ ۔ لون معدوم ہوتے ہین اور س بہی فنا ہوتا ہے تو دفعہ ۳۶۲ کے ترکیب سی مقادیر مجہول غیر المعین صورت ۰/۰ کی ہوجائیگی اس صورت مین ہم ن ۔ ۱ مساواتین معلوم مساواتون مین سی لین تو نسبت ن ۔ ۱ مقادیر مجہول کی باقی مقدار مجہول کی ساتہہ دریافت کرنی کی واسطی یہہ مساواتین کافی ہونگین

یہہ نسبتین بہی ایک دفعہ معین ہوسکتی ہین اسواسطی کہ ہم کو یہہ حاصل ہوسکتا ہے کہ

لا۱ : لا۲ : لا۳ : ۔ ۔ ۔ = ل/(ے و۱) : ل/(ے و۲) : ل/(ے و۳) : ۔ ۔ ۔

اسمین ے ایک صحیح عدد ہے اور ن سے بڑا نہین ہے

دلیل اس سبب سے کہ س = ۰ تو بموجب دفعہ ۳۴۹ کے ے اور ک کی تمام صحیح قیمتون ۱ اور ن کے درمیان ہونگین

اک و۱ ل/(ے و۱) + اک و۲ ل/(ے و۲) + اک و۳ ل/(ے و۳) + ۔ ۔ ۔ = ۰

اور جب لا۱ و لا۲ و لا۳ ۔ ۔ ۔ اوپر کی نسبت معینہ کے موافق لی گئی ہین تو ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

اک و۱ لا۱ + اک و۲ لا۲ + اک و۳ لا۳ + ۔ ۔ ۔ = ۰

معلوم مساواتون مین سی ان ۔ ۱ مساواتین لین اور لو۱ و لو۲ ۔ ۔ لو۳ ہریک کو برابر صفر کے فرض کرین تو ہم کو اکثر اکیلی محدود قیمت ہریک (ن ۔ ۱) مقادیر مجہول اور باقی مقدار مجہول مین نسبت معلوم ہوجائیگی

اسی یہہ استخراج ہوتا ہے کہ جب س = ۰ تو

ل/(ے و۱) : ل/(ے و۲) : ل/(ے و۳) : ۔ ۔ ۔

بالکل بے لگاؤ سے ہین

(۳۶۵) اگر لو۱ و لو۲ ۔ ۔ لون تمام معدوم ہوجائین اور س فنا نہ ہو تو نظم مساوات کا دفعہ ۳۶۲ مین کوئی حل نہین رکہتا الا اوس حالت مین کہ لا۱ و لا۲ و لا۳ ۔ ۔ لان تمام صفر ہون شرط س = ۰ ضروری تا کہ مقادیر مجہول کی قیمتین جو صفر نہ ہون دریافت ہوجائین

(۳۶۶) معادلات

$$\text{ا}_1\text{لا} + \text{ب}_1\text{د} + \text{س}_1\text{ی} = 0$$

$$\text{ا}_2\text{لا} + \text{ب}_2\text{د} + \text{س}_2\text{ی} = 0$$

$$\text{ا}_3\text{لا} + \text{ب}_3\text{د} + \text{س}_3\text{ی} = 0$$

مین حل کی قابلیت جو صفر نہ ہو جب ہو گی کہ ہم کو یہہ حاصل ہو کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 \text{ و } \text{ب}_1 \text{ و } \text{س}_1 \\ \text{ا}_2 \text{ و } \text{ب}_2 \text{ و } \text{س}_2 \\ \text{ا}_3 \text{ و } \text{ب}_3 \text{ و } \text{س}_3 \end{vmatrix} = 0$$

اگر یہہ شرط پوری ہوتی ہو تو معادلات کی شرائط بھی اسی پوری ہونگین کہ

$$\text{لا : د : ی} :: \begin{vmatrix} \text{ب}_2 \text{ و } \text{س}_2 \\ \text{ب}_3 \text{ و } \text{س}_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \text{س}_2 \text{ و } \text{ا}_2 \\ \text{س}_3 \text{ و } \text{ا}_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \text{ا}_2 \text{ و } \text{ب}_2 \\ \text{ا}_3 \text{ و } \text{ب}_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{یا لا : د : ی} :: \begin{vmatrix} \text{ب}_3 \text{ و } \text{س}_3 \\ \text{ب}_1 \text{ و } \text{س}_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \text{س}_3 \text{ و } \text{ا}_3 \\ \text{س}_1 \text{ و } \text{ا}_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \text{ا}_3 \text{ و } \text{ب}_3 \\ \text{ا}_1 \text{ و } \text{ب}_1 \end{vmatrix}$$

$$\text{یا لا : د : ی} :: \begin{vmatrix} \text{ب}_1 \text{ و } \text{س}_1 \\ \text{ب}_2 \text{ و } \text{س}_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \text{س}_1 \text{ و } \text{ا}_1 \\ \text{س}_2 \text{ و } \text{ا}_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \text{ا}_1 \text{ و } \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 \text{ و } \text{ب}_2 \end{vmatrix}$$

یہہ تینوں صورتین حل کی موافق دفعہ ۳۶۴ کے ایک دوسرے کے ساتھہ منطبق ہوتی ہین

(۳۶۷) دفعہ ۳۶۲ کے معادلات سے ہم یہہ استنباط کرتے ہین کہ

$$\text{لو}_1\text{ا}_{1\text{و}_1} + \text{لو}_2\text{ا}_{2\text{و}_1} + \text{لو}_3\text{ا}_{3\text{و}_1} + \cdots + \text{لو}_\text{ن}\text{ا}_{\text{ن}\text{و}_1} = \text{س لا}_1$$

$$\text{لو}_1\text{ا}_{1\text{و}_2} + \text{لو}_2\text{ا}_{2\text{و}_2} + \text{لو}_3\text{ا}_{3\text{و}_2} + \cdots + \text{لو}_\text{ن}\text{ا}_{\text{ن}\text{و}_2} = \text{س لا}_2$$

$$\vdots$$

$$\text{لو}_1\text{ا}_{1\text{و}_\text{ن}} + \text{لو}_2\text{ا}_{2\text{و}_\text{ن}} + \text{لو}_3\text{ا}_{3\text{و}_\text{ن}} + \cdots + \text{لو}_\text{ن}\text{ا}_{\text{ن}\text{و}_\text{ن}} = \text{س لا}_\text{ن}$$

فرض کرو کہ مقطع ح ± ا ۱ ا ۲ و ۲ . . . ا ن و ن کو ع ر تعبیر کرتا ہے سے دک امثال ا ے و ک کو جو ع ر مین ہو تعبیر کرتا ہی اور ر کے ما داتون سے قیمتین لو۱ و لو۲ . . لو ن کی دریافت کر سکتی ہین اور دفعہ ۳۶۲ کی طرح عمل کر کے ہم کو یہہ نتیجہ عامہ حاصل ہوگا

$$\text{ع ر لو ک} = \text{ر} \left\{ \text{لا}_1 \text{ ا ک و}_1 + \text{لا}_2 \text{ سر ک و}_2 + \cdots + \text{لا ن سر ک و ن} \right\}$$

دفعہ ۳۶۲ کے مساوات معلوم سی اس نتیجہ کے مقابلہ کرنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{ا ک و}_1 \text{ لا}_1 + \text{ا ک و}_2 \text{ لا}_2 + \cdots + \text{ا ک و ن لا ن} = \text{لو ک}$$

چونکہ قیمتین لو ک کی متطابقہ مین

$$\frac{\text{ر سر ک و ے}}{\text{ع ر}} = \text{ا ک و ے}$$

لیکن ع ر = ر ن-۱ بموجب دفعہ ۳۵۸ کے پس

$$\text{سر ک و ے} = \text{ر}^{\text{ن}-2} \text{ ا ک و ے}$$

(۳۶۸) اب ہم ایک اور سوال مین مقطعات کا استعمال کرتی ہین یعنی اونکی استعانت سی مقادیر معلومہ کے فرقون کا حاصل ضرب دریافت کرتے ہین

فرض کرو کہ ن مقادیر سہ۱ و سہ۲ و . . سہ ن سی تعبیر کیجائین اور ع اوس حاصل ضرب کو تعبیر کرے جو اون فرقون کی ضرب دینی سی پیدا ہو جو ان ن مقادیر مین سی ہر ایک کو اوسکی قبل کی مقدار کے تفریق کرنے سے پیدا ہون یعنی

$$\text{ع} = (\text{سہ}_2 - \text{سہ}_1)(\text{سہ}_3 - \text{سہ}_1) \cdots (\text{سہ ن} - \text{سہ}_1)(\text{سہ}_3 - \text{سہ}_2)(\text{سہ}_4 - \text{سہ}_2) \cdots (\text{سہ ن} - \text{سہ ن}_{-1})$$

تو ع مقطع ن رتبہ کا پیدا ہو سکتا ہی اسواسطی کہ اس مقطع پر خیال کرو

$$\begin{vmatrix} \text{ا و سہ}_1 \text{ و سہ}_1^2 & \cdots & \text{سہ}_1^{\text{ن}-1} \\ \text{ا و سہ}_2 \text{ و سہ}_2^2 & \cdots & \text{سہ}_2^{\text{ن}-1} \\ \text{ا و سہ ن و سہ ن}^2 & \cdots & \text{سہ ن}^{\text{ن}-1} \end{vmatrix}$$

یہہ مقطع ایک جملہ ناطقہ صحیحہ مقادیر $س_۱$ و $س_۲$ . . . $س_ن$ کا ہی اور وہ بموجب دفعہ
۳۴۵ کے معدوم ہوتا ہی اگر کوئی دو اونمین سی برابر ہون اسواسطی وہ اوس حاصل ضرب پر
جس کو ع سی تعبیر کیا ہی تقسیم ہو سکتا ہی اور یہہ اور نیز مقطع اور حاصل ضرب
ع دونو $\frac{ن(ن-۱)}{۲}$ درجہ کے قوا اور حواصل ضرب $س_۱$ و $س_۲$ . . . $س_ن$
مین ہین اسیواسطی اب مقطع کو ع پر تقسیم کرین تو کوئی عدد خارج قسمت ہوگا
اور یہہ عدد چاہئی کہ واحد ہو کیونکہ یہہ اول جزو ترکیبی مقطع کو اون اجزاء ضربی ثنائی کے
حاصل ضرب کے اول ارقام سی مقابلہ کرکے ہم دیکھتی ہین اور ع ان اجزاء ضربی سی مرکب ہی

(۳۶۹) ن رتبی کے مقطع مین $لـن$ رقمین ہین حاصل ضرب ع مین پہلی مختصر ہونے سے
اور محو ہوتی سی بہت سی رقمین ہونگین یعنی $\frac{ن(ن-۱)}{۲}$ پس کثرت ارقام کی بچنی کی لئی
مقطع بڑی فایدہ مند صورت حاصل ضرب کے واسطے ہے

(۳۷۰) ہم کو حاصل ہے کہ

$$ع^۲ = \begin{vmatrix} ۱ \;و\; س_۱ \;و\; س_۱^۲ \;و\; \dots \; س_۱^{ن-۱} \\ ۱ \;و\; س_۲ \;و\; س_۲^۲ \;و\; \dots \; س_۲^{ن-۱} \\ \vdots \\ ۱ \;و\; س_ن \;و\; س_ن^۲ \; \dots \; س_ن^{ن-۱} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} ۱ \;و\; س_۱ \;و\; س_۱^۲ \;و\; \dots \; س_۱^{ن-۱} \\ ۱ \;و\; س_۲ \;و\; س_۲^۲ \; \dots \; س_۲^{ن-۱} \\ \vdots \\ ۱ \;و\; س_ن \;و\; س_ن^۲ \; \dots \; س_ن^{ن-۱} \end{vmatrix}$$

اب حاصل ضرب ان مقطعات کا ایکلی مقطع کی صورت مین نمایان ہو سکتا ہے۔ دفعہ
۳۶۵ مین جو چار ترکیبین لکھی ہین اونمین سی اخر ترکیب کے اختیار کرنے سے

$$ع^۲ = \begin{vmatrix} ص_۰ \;و\; ص_۱ \;و\; ص_۲ \; \dots \; ص_{ن-۱} \\ ص_۱ \;و\; ص_۲ \;و\; ص_۳ \; \dots \; ص_ن \\ \vdots \\ ص_{ن-۱} \;و\; ص_ن \;و\; ص_{ن+۱} \; \dots \; ص_{۲ن-۲} \end{vmatrix}$$

اسمین $ص_ر = س_۱^ر + س_۲^ر + \dots + س_ن^ر$

(۳۷۱) مثلاً فرض کرو کہ $س_۱$ و $س_۲$ . . . $س_ن$ قیمتین ن درجہ کی ایک مساوات کی ہین تو $ع^۲$

قیمتون کے فرقون کی حاصل ضرب کا مجذور ہوگا پس مساوات کی قیمتون کی فرقون کے مجذور ایک مقطع کی صورت مین نمایان ہوسکتی ہین اوراس مقطع کے اجزاء ذاتی مساوات معلوم کی امثال مین معلوم ہونگے اسواسطی کہ ص، امثال کی رقمون مین بیان ہوسکتاہی

(۳۷۲) فرض کروکہ ن مقادیر مجہولہ لا۱ و لا۲ ... لان کی قیمتین ہم ان مساواتون سی دریافت کرنی ہین کہ

$$\text{لا}_1 + \text{لا}_2 + \text{لا}_3 + \cdots + \text{لا}_\text{ن} = 1$$

$$\text{لا}_1\text{س}_1 + \text{لا}_2\text{س}_2 + \text{لا}_3\text{س}_3 + \cdots + \text{لا}_\text{ن}\text{س}_\text{ن} = \text{ط}$$

$$\text{لا}_1\text{س}_1^2 + \text{لا}_2\text{س}_2^2 + \text{لا}_3\text{س}_3^2 + \cdots + \text{لا}_\text{ن}\text{س}_\text{ن}^2 = \text{ط}^2$$

$$\text{لا}_1\text{س}_1^{\text{ن}-1} + \text{لا}_2\text{س}_2^{\text{ن}-1} + \text{لا}_3\text{س}_3^{\text{ن}-1} + \cdots + \text{لا}_\text{ن}\text{س}_\text{ن}^{\text{ن}-1} = \text{ط}^{\text{ن}-1}$$

قیمتین مقادیر مجہولہ کی اس صورت قانونی سی معلوم ہوا کرینگے کہ

$$\text{لا}_\text{ے} = \frac{(\text{س}_1-\text{ط})(\text{س}_2-\text{ط})\cdots(\text{س}_{\text{ے}-1}-\text{ط})(\text{س}_{\text{ے}+1}-\text{ط})\cdots(\text{س}_\text{ن}-\text{ط})}{(\text{س}_1-\text{س}_\text{ے})(\text{س}_2-\text{س}_\text{ے})\cdots(\text{س}_{\text{ے}-1}-\text{س}_\text{ے})(\text{س}_{\text{ے}+1}-\text{س}_\text{ے})\cdots(\text{س}_\text{ن}-\text{س}_\text{ے})}$$

اسواسطی کہ بموجب دفعہ ۳۶۲ کے

$$\text{س}\,\text{لا}_1 = \text{ص}_1$$

اسمین

$$\text{س} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \text{س}_1 & \text{س}_2 & \text{س}_3 & \cdots & \text{س}_\text{ن} \\ \text{س}_1^2 & \text{س}_2^2 & \text{س}_3^2 & \cdots & \text{س}_\text{ن}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{س}_1^{\text{ن}-1} & \text{س}_2^{\text{ن}-1} & \text{س}_3^{\text{ن}-1} & \cdots & \text{س}_\text{ن}^{\text{ن}-1} \end{vmatrix}$$

اور

$$\text{ص} = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \text{س}_1 & \cdots & \text{س}_{\text{ے}-1} & \text{ط} & \text{س}_{\text{ے}+1} & \cdots & \text{س}_\text{ن} \\ \text{س}_1^2 & \cdots & \text{س}_{\text{ے}-1}^2 & \text{ط}^2 & \text{س}_{\text{ے}+1}^2 & \cdots & \text{س}_\text{ن}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{س}_1^{\text{ن}-1} & \cdots & \text{س}_{\text{ے}-1}^{\text{ن}-1} & \text{ط}^{\text{ن}-1} & \text{س}_{\text{ے}+1}^{\text{ن}-1} & \cdots & \text{س}_\text{ن}^{\text{ن}-1} \end{vmatrix}$$

اب فرض کروکہ ے وین عمودی صف س مین اول رکھی جای اور ے وین عمودی صف ص مین اول رکھی جای دفعہ ۳۴۷ کو دیکھو پہر بموجب دفعہ ۲۶۸ کے دونو

مقطعات فرقون کے حواصل ضرب سی بدل جائین اور اجزاء ضربی شمار کنندہ اور نسب نما مین
بخوبی اجائین تو لاے کی قیمت اوپر کی صورت معینہ مین ہم کو معلوم ہوگی

(۲۷۳) مساوات معلوم سی خاص مقادیر کے ساقط کرنی سی ایک مساوات حاصل
کرنی کی اندر بہی ترکیب مقطعات کی کام اتی ہی فرض کرو کہ معادلات ۔ ح (لا) = ۰ اور مح (لا) = ۰
مین ہم کو لا ساقط کرنا ہے اسمین

ح (لا) = ا$_0$ + ا$_1$ لا + ا$_2$ لا^2 + ا$_3$ لا^3

مح (لا) = ب$_0$ + ب$_1$ لا + ب$_2$ لا^2

اب ہم عمل اسطرح کرتے ہین کہ

ح (لا) = ا$_0$ + ا$_1$ لا + ا$_2$ لا^2 + ا$_3$ لا^3

لا ح (لا) = ۰ + ا$_0$ لا + ا$_1$ لا^2 + ا$_2$ لا^3 + ا$_3$ لا^4

مح (لا) = ب$_0$ + ب$_1$ لا + ب$_2$ لا^2

لا مح (لا) = ۰ + ب$_0$ لا + ب$_1$ لا^2 + ب$_2$ لا^3 + ۰

لا^2 مح (لا) = ۰ + ۰ + ب$_0$ لا^2 + ب$_1$ لا^3 + ب$_2$ لا^4

فرض کرو کہ س =

ا$_0$	ا$_1$	ا$_2$	ا$_3$	۰
۰	ا$_0$	ا$_1$	ا$_2$	ا$_3$
ب$_0$	ب$_1$	ب$_2$	۰	
۰	ب$_0$	ب$_1$	ب$_2$	۰
۰	۰	ب$_0$	ب$_1$	ب$_2$

اور چونکہ بموجب فرض کے ح (لا) اور مح (لا) صفر ہین اسواسطی لا ح (لا) و د لا مح (لا)

اور لاٗ (مح لا) بہی صفر ہین تو بموجب دفعہ ۳۵۵ کی یہہ مستنبط ہوتا ہی کہ س = ۰ کی ہونا

ایک ضروری شرط ہی جو امثال ح (لا) اور مح (لا) مین ہونی چاہیی

(۳۷۴) ہمنے ایک خاص مثال تحقیقات عامہ کی دفعہ گذشتہ مین لکہی تہی اب ہم اوسکو

اسطرح لکہتی ہین کہ وہ زیادہ سمجہہ مین اوی فرض کرو کہ

ح (لا) = ا. + ا۱ لا + ا۲ لا۲ + . . . + ام لام = ۰

مح (لا) = ب. + ب۱ لا + ب۲ لا۲ + . . . + بن لان = ۰

اب ان مساواتون مین سی لا کو ساقط کرنا ہے اب ہم کو یہہ حاصل ہے کہ

ح (لا) = ا. + ا۱ لا + ا۲ لا۲ + . . . + ام لام

لا ح (لا) = ا. لا + ا۱ لا۲ + ا۲ لا۳ + . . . + ام لام+۱

لان-۱ ح (لا) = ا. لان-۱ + ا۱ لان + ...

مح (لا) = ب. + ب۱ لا + ب۲ لا۲ + . . . + بن لان

لا مح (لا) = ب. لا + ب۱ لا۲ + ... + بن-۱ لان + بن لان+۱

لام-۱ مح (لا) = ب. لام-۱ + ب۱ لام + . .

فرض کرو کہ م + ن رتبی کی مقطعات کو س تعبیر کرتا ہی جسکی اول ن صفین یہہ ہین کہ

ا. و ا۱ و ا۲ . . . ام و ۰ و ۰ . . . . . .

۰ و ا. و ا۱ . . . ام-۱ و ام و ۰ و ۰

۰ و ۰ و ا. . . . ام-۲ و ام-۱ و ام و . . . . .

اور اسکے بعد م افقی صفین یہہ ہین

ب. و ب۱ و ب۲ . . . بن و ۰ و ۰ و ۰

۰ و ب. و ب۱ . . . بن-۱ و بن و ۰ و ۰

۰ و ۰ و ب. . . . بن-۲ و بن-۱ و بن و ۰

توس = ۰ ایک ضرور ارتباط مثال مین ہونا چاہی تاکہ ح (لا) اور مح (لا)
ایک ہی وقت مین معدوم ہون

(۳۷۵) ایک جبریہ جملہ کو جو دوسرے جملہ پر تقسیم کرنے سے خارج قسمت پیدا ہوتا ہے اوسکو مقطع کی صورت مین نمایان کرسکتی ہین

فرض کرو کہ $مح (لا) = ا_۰ لا^{م} + ا_۱ لا^{م-۱} + ا_۲ لا^{م-۲} + \cdots + ا_ر لا^{م-ر} + \cdots$

$صح (لا) = ب_۰ لا^{ن} + ب_۱ لا^{ن-۱} + ب_۲ لا^{ن-۲} + \cdots + ب_ر لا^{ن-ر} + \cdots$

اور خارج قسمت جو مح (لا) کو صح (لا) پر تقسیم کرنے سے پیدا ہو اوسے

$ق_۰ لا^{م-ن} + ق_۱ لا^{م-ن-۱} + \cdots + ق_ر لا^{م-ن-ر} + \cdots$

$$ق_ر = \frac{1}{ب_۰^{ر+۱}} \begin{vmatrix} ب_۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ا_۰ \\ ب_۱ & ب_۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ا_۱ \\ ب_۲ & ب_۱ & ب_۰ & ۰ & \cdots & ا_۲ \\ ب_۳ & ب_۲ & ب_۱ & ب_۰ & \cdots & ا_۳ \\ ب_ر & ب_{ر-۱} & ب_{ر-۲} & \cdots & \cdots & ا_ر \end{vmatrix}$$

اور یہہ امتحان سی ثابت ہوسکتا ہے کہ ر = ۰ یا ۱ یا ۲ کے ہو اور علی العموم استقراء سے ثابت ہوسکتا ہے مثلاً ہم فرض کرتے ہین کہ ق۰ و ق۱ و ق۲ و ق۳ اور ق۴ اس قاعدہ کی موافق مناسب طور پر دریافت ہوجائین اور ہم یہہ ثابت کرنا چاہتی ہین کہ ق۵ بہی ایسا ہے

صح (لا) کو خارج قسمت مین ضرب دو اور مح (لا) کے مساوی لکہو تو یہہ دریافت ہوگا

$ا_۵ = ق_۰ ب_۵ + ق_۱ ب_۴ + ق_۲ ب_۳ + ق_۳ ب_۲ + ق_۴ ب_۱ + ق_۵ ب_۰ \cdots (۱)$

اب ہم کو یہہ ثابت کرنا ہی کہ ہم نے جو کچہ ق۵ کے واسطی حاصل کیا ہی وہ مطابق اوسکی ہے جو مقطع سی دریافت ہوا ہی فرض کرو کہ س مقطع کو تعبیر کرتا ہے تو

ر ب. = ۱/ب٥.

| ب. و ٠ و ٠ و ٠ و ٠ و ا. |
| ب۱ و ب. و ٠ و ٠ و ٠ و ا۱ |
| ب۲ و ب۱ و ب. و ٠ و ٠ و ا۲ |
| ب۳ و ب۲ و ب۱ و ب. و ٠ و ا۳ |
| ب۴ و ب۳ و ب۲ و ب۱ و ب. و ا۴ |
| ب٥ و ب۴ و ب۳ و ب۲ و ب۱ و ا٥ |

= ۱/ب٥. { −ص٥ ب٥ + ص۴ ب۴ − ص۳ ب۳ + ص۲ ب۲ − ص۱ ب۱ + ص. ا٥ }

اسمین ص٥ و ص۴ و ص۳ و ص۲ و ص۱ و ص. مقطعات ہین جو اس سے اسطرح پیدا ہوتی ہین کہ ہمیشہ اخر صف افقی کو اور ایک عمودی صف کو متواتر محو کرتے ہین پس

ص. =

| ٠ و ٠ و ٠ و ٠ و ا. |
| ب. و ٠ و ٠ و ٠ و ا۱ |
| ب۱ و ب. و ٠ و ٠ و ا۲ |
| ب۲ و ب۱ و ب. و ٠ و ا۳ |
| ب۳ و ب۲ و ب۱ و ب. و ا۴ |

=

| ا. و ٠ و ٠ و ٠ و ٠ |
| ا۱ و ب. و ٠ و ٠ و ٠ |
| ا۲ و ب۱ و ب. و ٠ و ٠ |
| ا۳ و ب۲ و ب۱ و ب. و ٠ |
| ا۴ و ب۳ و ب۲ و ب۱ و ب. |

بموجب دفعہ ۴۴۳ کے پس دفعہ ۴۴۶ کو بار بار کام مین لا کر ہم کو ا. ب.۴ کی قیمت مقطع کی حاصل ہوگی پس

ص٥/ب.٥ = ا./ب. = ق.

پہر ص۴ =

| ب. و ٠ و ٠ و ٠ و ا. |
| ب۱ و ٠ و ٠ و ٠ و ا۱ |
| ب۲ و ب. و ٠ و ٠ و ا۲ |
| ب۳ و ب۱ و ب. و ٠ و ا۳ |
| ب۴ و ب۲ و ب۱ و ب. و ا۴ |

= −

| ب. و ا. و ٠ و ٠ و ٠ |
| ب۱ و ا۱ و ٠ و ٠ و ٠ |
| ب۲ و ا۲ و ب. و ٠ و ٠ |
| ب۳ و ا۳ و ب۱ و ب. و ٠ |
| ب۴ و ا۴ و ب۲ و ب۱ و ب. |

بموجب دفعہ ۴۴۳ کے اب دفعہ ۴۴۶ کی طرح ثابت ہو سکتا ہے کہ

| ب. و ا. و. و. |
| ب۱ و ا۱ و. و. |
| ب۲ و ا۲ و ب. و. |
| ب۳ و ا۳ و ب۱ و. |
| ب۴ و ا۴ و ب۲ و ب. |

= | ب. و ا. ، ب۱ و ا۱ | × | ب. و. و. ، ب۱ و ب. و. ، ب۲ و ب۱ و ب. | ۔

پس ص۴ = − | ب. و ا. ، ب۱ و ا۱ | | ب. و. و. ، ب۱ و ب. و. ، ب۲ و ب۱ و ب. | = − | ب. و ا. ، ب۱ و ا۱ | ب.۳ = − ق۱ ب.۵

اسیواسطے ص۴ / ب.۵ = − ق۱

پہر ص۳ =

| ب. و. و. و. و ا. |
| ب۱ و ب. و. و. و ا۱ |
| ب۲ و ب۱ و. و. و ا۲ |
| ب۳ و ب۲ و ب. و. و ا۳ |
| ب۴ و ب۳ و ب۱ و ب. و ا۴ |

= | ب. و. و ا. ، ب۱ و ب. و ا۱ ، ب۲ و ب۱ و ا۲ | | ب. و. ، ب۱ و ب. |

= ق۲ ب.۵

اسیواسطے ص۳ / ب.۵ = ق۲

اسیطرح ص۲ / ب.۵ = ق۳

ص۱ / ب.۵ = ق۴

اور ص. / ب.۵ = ۱

پس ر بہ = − ق. ب۵ − ق۱ ب۴ − ق۲ ب۳ − ق۳ ب۲ − ق۴ ب۱ + لہ۵ ۰ (۲)

پس اسی ہم یہہ دیکھتے ہیں کہ (۲) سی جو رس دریافت ہوا وہ بالکل مطابق ق۵ کے قیمت کے ہی جو (۱) سے دریافت ہوئی تھی اور یہی ثابت کرنا تھا ترکیب جو ق۵ کی نسبت ہم کام میں لائے

وہ عام ہی اور اسیواسطی جو قیار کی قیمت اوپر تشخیص ہوئی ہی وہ صحیح اور درست نہ ہے

(۳۷۶) اب ہم دو مثالون پر خاتمہ کرتے ہین

(۱) فرض کرو کہ مقطع ن + ۱ رتبہ کا ہو جسمین تمام اجزاء ذاتی برابر واحد کے ہون الا وہ جو قطر کا سلسلہ بناتی ہین مستثنی ہین اور وہ ۱ و ۱ + ا$_{1}$ و ۱ + ا$_{2}$ ... ۱ + ا$_{ن}$ ہین تو قیمت اس مقطع کی ا$_{1}$ ا$_{2}$ ... ا$_{ن}$ ہے

اسواسطی کہ اگر مقادیر ا$_{1}$ و ا$_{2}$ ... ا$_{ن}$ مین سی ایک معدوم ہو تو مقطع معدوم ہوتا ہے کیونکہ اوسکی دو افقی صفین مطابق ہوتی ہین اسواسطی مقطع ا$_{1}$ ا$_{2}$ ... ا$_{ن}$ پر تقسیم ہوتا ہی اور خارج قسمت اس تقسیم کا واحد ہوگا کیونکہ یہہ اول جز ترکیبی کی دیکھنی سی معلوم ہوتا ہی

(۲) فرض کرو کہ ن رتبی کا مقطع ہی جسمین تمام اجزاء ذاتی سوا اوس سلسلہ قطر کے واحد ہین اور اس سلسلہ قطر مین ۱ + ا$_{1}$ و ۱ + ا$_{2}$ ... ۱ + ا$_{ن}$ ہین تو قیمت مقطع کی یہہ ہوگی کہ

ا$_{1}$ ا$_{2}$ ... ا$_{ن}$ $\left[۱ + \frac{۱}{ا_{1}} + \frac{۱}{ا_{2}} + \dots + \frac{۱}{ا_{ن}} \right]$

اسواسطے اگر مقادیر ا$_{1}$ و ا$_{2}$ ... ا$_{ن}$ مین سی کوئی ایک معدوم ہوجاے تو مقطع کی صورت پہلی مثال کی ایک صورت بنجایگی اور رقم ا$_{1}$ ا$_{2}$ ... ا$_{ن}$ اول جز ترکیبی مقطع پر خیال کرنے سے دریافت ہوتی ہے

مثالین

باب ۱

(۱) جب لا^{5} + ۷ لا^{4} + ۳ لا^{3} + ۱۷ لا^{2} + ۱۰ لا − ۱۲ کو لا − ۴ پر تقسیم کرین تو باقی اور خارج قسمت دریافت کرو

(۲) (۱ + لا)^{ن} کو قواء لا مین پھیلا کر اول جملہ مشتقہ (۱ + لا)^{ن} کا دریافت کرو

(۳) ثابت کرو کہ مساوات لا^{3} + ۳ لا^{2} + لا − ۶ = ۰ کی صرف ایک ہی قیمت ۱ اور ۲ کے درمیان ہوگی

باب ۲

(۱) مساوات $لا^{۴} = \pm \sqrt{-۱}$ کی ایک قیمت دریافت کرو

(۲) مساوات $لا^{۶} = -\sqrt{-۱}$ کی ایک قیمت دریافت کرو

باب ۳

(۱) وہ مساوات بناؤ جسکی قیمتین ۱ و ۱ و -۱ و -۲ ہون

(۲) وہ مساوات بناؤ جسکی قیمتین $۱ \pm \sqrt{-۲}$ اور $۲ \pm \sqrt{-۳}$

(۳) اٹھوین درجہ کی مساوات ایسی بناؤ جسکی قیمت $\sqrt{۲} + \sqrt{۳} + \sqrt{-۱}$ ہو

(۴) ان مساواتون کو حل کرو مساوات کی ایک قیمت معلوم ہے

(۱) $لا^{۳} - لا^{۲} + ۳لا + ۵ = ۰$ اور قیمت معلوم $۱ - ۲\sqrt{-۱}$

(۲) $لا^{۴} + ۴لا^{۳} + ۶لا^{۲} + ۴لا + ۵ = ۰$ اور قیمت معلوم $\sqrt{-۱}$

(۳) $لا^{۴} + لا^{۳} - ۲۵لا^{۲} + ۴۱لا + ۶۶ = ۰$ اور قیمت معلوم $۳ + \sqrt{-۲}$

(۴) $لا^{۴} + ۲لا^{۳} - ۴لا^{۲} - ۴لا + ۴ = ۰$ قیمت معلوم $\sqrt{۲}$

(۵) $لا^{۴} - ۲لا^{۳} - ۵لا^{۲} - ۶لا + ۲ = ۰$ قیمت معلوم $۲ + \sqrt{۳}$

(۶) $لا^{۶} - لا^{۵} - ۸لا^{۴} + ۲لا^{۳} + ۲۱لا^{۲} - ۹لا - ۵۴ = ۰$ قیمت $\sqrt{۲} + \sqrt{-۱}$

(۵) مساوات $لا^{۵} - لا^{۴} + ۸لا^{۲} - ۹لا - ۱۵ = ۰$ کو حل کرو ایک قیمت اوسکی $\sqrt{۳}$ اور دوسری قیمت $۱ - ۲\sqrt{-۱}$ ہے

(۶) مساوات $لا^{۳} - ۴لا^{۲} + لا + س = ۰$ کی ایک قیمت = ۳ اور قیمتین اور س دریافت کرو

(۷) مساوات $لا^{۶} - ۶لا^{۵} + ۴۰لا^{۳} + ۶۰لا^{۲} - لا - ۱ = ۰$ کی متکافی قیمتون کا مجموعہ اور قیمتون کی مجذورون کا مجموعہ اور متکافی قیمتون کی مجذورون کا مجموعہ دریافت کرو

(۸) مساوات $لا^{۴} - ۲۱لا^{۳} + ۱۶۶لا^{۲} - ۵۴۶لا + ۵۸۰ = ۰$ کی قیمتین سہ اور صہ اور سہ + صہ + (سہ - صہ) $\sqrt{-۱}$ کی صورت کی ہین مساوات کو حل کرو

(۹) مساوات معلوم کی قیمتون کے مکعبون کا مجموعہ دریافت کرو

(۱۰) وہ مساوات دریافت کرو جسکی قیمتین سہ و صہ و ہر و فر

$\frac{۱}{۲}(۱+\sqrt{-۳} \pm \sqrt{۲\sqrt{-۳}})$ اور $\frac{۱}{۲}(۱-\sqrt{-۳} \pm \sqrt{-۲\sqrt{-۳}})$ ہین اور ثابت کرو کہ

$$\frac{سہ^۲+صہ^۲}{سہ\,صہ} + \frac{سہ^۲+ہر^۲}{سہ\,ہر} + \ldots = ۰$$

(۱۱) اگر ط و ص و س قیمتین ایک مساوات کی ہون تو قیمت

$$\frac{ط^۲}{ص^۲} + \frac{ط^۲}{س^۲} + \ldots + \frac{ص^۲}{ط^۲} + \frac{ص^۲}{س^۲} + \ldots$$

کی دریافت کرو

(۱۲) کچھ مثبت مقادیر ہین اور اونکا اوسط حسابیہ بڑا اوسط ہندسیہ سے ہی تو ثابت کرو کہ $ع_۱^۲ - ۲ع_۲$ چھوٹا ہے $ع_ن^{\frac{۲}{ن}}$ سے ہی اور مساوات کی ناممکن قیمتین ہین

(۱۳) اگر ط و ص و س . قیمتین مساوات کی ہون تو ثابت کرو کہ

$$(۱-ع_۲+ع_۴-\ldots)^۲ + (ع_۱-ع_۳+ع_۵-\ldots)^۲ = (۱+ط^۲)(۱+ص^۲)(۱+س^۲)\ldots$$

باب ۴

(۱) ذیل کی مساواتون کی ہیئت بدل کر ایسی مساواتین بناؤ کہ جسکی قیمتین اصل مساوات کی قیمتون پر ایک عدد معین کی زیادہ کرنے سے پیدا ہون

(۱) $لا^۵ - ۳لا^۴ - لا^۲ + ۴ = ۰$ و ۱ (۲) $لا^۶ + لا + ۱ = ۰$ و ۳

(۳) $لا^۵ + ۴لا^۳ - لا^۲ + ۱۱ = ۰$ و −۳

(۲) ذیل کی مساواتون کو ایسی مساواتون مین تبدیل کردو کہ اونکی دوسری رقم نہ ہو

(۱) $لا^۳ - ۳لا^۲ + ۴لا - ۴ = ۰$ (۲) $لا^۳ - ۶لا^۲ + ۱۲لا + ۱۹ = ۰$

(۳) $لا^۴ - ۸لا^۳ + ۵ = ۰$ (۴) $لا^۵ + ۵لا^۴ + ۳لا^۳ + لا^۲ + لا - ۱ = ۰$

(۳) ذیل کی مساواتون کو ایسی دوسری مساواتون سی تبدیل کرو کہ اوسمین تیسری رقم نہ ہو

(۱) $لا^۳ + ۵لا^۲ + ۸لا - ۱ = ۰$ (۲) $لا^۳ - ۶لا^۲ + ۹لا - ۱۰ = ۰$

(۳) $لا^۴ - ۸لا^۳ + ۱۸لا^۲ - ۵لا + ۱۴ = ۰$ (۴) $لا^۴ - ۱۸لا^۳ - ۶۰لا^۲ + لا - ۲ = ۰$

(۴) مساوات لا^۳ + ۲ لا^۲ + ۴/۳ لا + ۱/۹ = ۰ کی صورت بدلکر ایسی مساوات بناؤ کہ امثال اوسکی اعداد صحاح ہون اور اول رقم کا سر ایک ہو

(۵) دوسرے رقم کو دور کرو اور اس مساوات کو حل کرو۔

لا^۳ − ۱۸ لا^۲ + ۱۵۷ لا − ۵۱۰ = ۰

(۶) ذیل کی مساواتون مین سی ہر یک مساوات کی ہیئت اسطرح تبدیل کرو کہ اوسکی قیمتین مجذور مساوات کی قیمتون کی تفاوت کا ہوا اور قیمتون کی خواص پر بحث لکھو

(۱) لا^۳ + ۷ لا − ۱ = ۰ (۲) لا^۳ − ۶ لا + ۶ = ۰

(۷) لا^۴ − ۲ لا^۳ + ۱۲ لا − ۳ = ۰ کی ہیئت بدلکر ایسی مساوات بناؤ کہ جسکی قیمتین تکافی مساوات معلوم کی قیمتون کی ہون اور ہیئت بدلی ہوئی جو مساوات حاصل ہوا اوسکی قیمتون کو بقدر واحد کے کم کرو

(۸) ثابت کرو کہ مساوات لا^۴ + لا^۳ − ۸ لا − ۱۵ = ۰ کی دو حقیقی قیمتین مختلف العلامت ہین اور دو سی زیادہ اوسکی حقیقی قیمتین نہین ہین اور وہ −۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہین

(۹) مساوات لا^۳ + ع لا^۲ + ق لا + ر = ۰ کی قیمتین ط و ص و س سے تعبیر ہوتی ہین اس مساوات کی ہیئت بدلکر اور مساواتین بناؤ جنکی قیمتین معینہ بہ تفصیل ذیل ہو

(۱) ط^۲ و ص^۲ و س^۲ (۲) ص + س و س + ط و ط + ص

(۳) ۱/(ص + س) و ۱/(س + ط) و ۱/(ط + ص) (۴) ط/(ص س) و ص/(س ط) و س/(ط ص)

(۵) ص^۲ س^۲ و س^۲ ط^۲ و ط^۲ ص^۲ (۶) لو (کہ ط) و لو (کہ ص) و لو (کہ س)

(۷) ۱/۲ (ص + س − ط) و ۱/۲ (س + ط − ص) و ۱/۲ (ط + ص − س)

(۸) ط/(ص + س) و ص/(س + ط) و س/(ط + ص) (۹) ط/(ص + س − ط) و ص/(س + ط − ص) و س/(ط + ص − س)

(۱۰) ص س + ۱/ط و س ط + ۱/ص و ط ص + ۱/س (۱۱) ص^۲ + س^۲ و س^۲ + ط^۲ و ط^۲ + ص^۲

(۱۲) ص/س + س/ص و س/ط + ط/س و ط/ص + ص/ط (۱۳) (ص^۲ + س^۲)/(ص^۲ س^۲) و (س^۲ + ط^۲)/(س^۲ ط^۲) و (ط^۲ + ص^۲)/(ط^۲ ص^۲)

(۱۴) ص − س و س − ص و س − ط و ط − س و ط − ص و ص − ط

(۱۰) مساوات $لا^۳ + ق لا + ر = ۰$ کی قیمتیں ط و ص و س ہیں اسکی ہئیت بدل کر اور مساواتیں بناؤ جنکی قیمتیں معینہ بہ تفصیل ذیل ہوں

(۱) $\left(\frac{ط}{ص - س}\right)^۲$ و $\left(\frac{ص}{س - ط}\right)^۲$ و $\left(\frac{س}{ط - ص}\right)^۲$

(۲) ص ط + ط س و س ص + ص ط و ط س + س ص

(۱۱) اگر مساوات $لا^۳ - ۶ لا^۲ + ۱۱ لا - ۶ = ۰$ کی قیمتیں ط و ص و س ہوں تو وہ مساوات بناؤ جسکے قیمتیں

$\frac{۱}{ص^۲ + س^۲}$ و $\frac{۱}{س^۲ + ط^۲}$ و $\frac{۱}{ط^۲ + ص^۲}$ ہوں

(۱۲) اگر $لا^۳ - ۲ لا^۲ + ۲ = ۰$ کی قیمتیں ط و ص و س ہوں تو وہ مساوات بناؤ جسکی قیمتیں $\frac{ص^۳ + س^۳}{ط^۳}$ و $\frac{س^۳ + ط^۳}{ص^۳}$ و $\frac{ط^۳ + ص^۳}{س^۳}$ ہوں

(۱۳) ثابت کرو کہ تیسری رقم مساوات

$$لا^۳ + ع لا^۲ + ق لا + ر = ۰$$

کی ساقط نہیں ہو سکتی اگر $ع^۲$ چھوٹا ۳ ق سے ہو

(۱۴) ثابت کرو کہ دوسری اور چوتھی رقم مساوات

$$لا^۴ + ع_۱ لا^۳ + ع_۲ لا^۲ + ع_۳ لا + ع_۴ = ۰$$

کی ایک ہی تبدل ہئیت سے ساقط ہو سکتی ہیں اگر $۸ ع_۳ = ع_۱ (۴ ع_۲ - ع_۱^۲)$

(۱۵) ان مساواتوں کو حل کرو

(۱) $لا^۴ + ۴ لا^۳ + ۷ لا^۲ + ۶ لا - ۱۰ = ۰$ (۲) $لا^۴ + ۴ لا^۳ + ۳ لا^۲ - ۲ لا - ۶ = ۰$

(۱۶) ثابت کرو کہ مساوات $لا^۴ + ۴ لا^۲ + ۶ لا + ۳ = ۰$ میں دوسری اور تیسری رقم ایک ہی تبدل ہئیت سے نہیں ساقط ہو سکتی لیکن اگر لا میں ضرب دیں تو ہو سکتی ہے

(۱۷) ثابت کرو کہ ن درجہ کی مساوات میں سے دوسرے اور تیسرے رقموں کا ساقط کرنا ممکن ہے اگر

ن × (قیمتوں کے مجذوروں کے مجموعہ) = قیمتوں کے مجموعہ کے مربع

باب ۵

(۱) ثابت کرو کہ مساوات لا^{۵} − ۴لا^{۲} + ۳ = ۰ کی کم سی کم دو خیالی قیمتیں ہیں

(۲) ثابت کرو کہ مساوات لا^{۷} − ۲لا^{۴} + لا^{۳} − ۱ = ۰ کی کم سی کم چار خیالی قیمتیں ہیں

(۳) ذیل کی مساواتوں میں کیا نتائج حاصل ہو سکتے ہیں

(۱) لا − ۵لا^{۶} + لا^{۲} − لا − ۱ = ۰ (۲) لا^{۳ن} − لا^{۲ن} + لا^{ن} + لا + ۱ = ۰

باب ۶

(۱) ان مساواتوں کو حل کرو ہر یک مساوات کی برابر قیمتیں ہیں

(۱) لا^{۳} − ۷لا^{۲} + ۱۶لا − ۱۲ = ۰ (۲) لا^{۳} − ۳لا^{۲} − ۹لا + ۲۷ = ۰

(۳) لا^{۳} − لا^{۲} − ۸لا + ۱۲ = ۰ (۴) لا^{۳} − ۵لا^{۲} − ۸لا + ۴۸ = ۰

(۵) لا^{۳} − لا − $\frac{۲}{۳\sqrt{۳}}$ = ۰ (۶) لا^{۳} − لا + $\frac{۲}{۳\sqrt{۳}}$ = ۰

(۷) لا^{۳} + ۸لا^{۲} + ۲۰لا + ۱۶ = ۰ (۸) لا^{۴} − $\frac{۱}{۲}$لا + $\frac{۳}{۱۶}$ = ۰

(۹) لا^{۴} − ۱۱لا^{۲} + ۱۸لا − ۸ = ۰

(۱۰) لا^{۴} − ۲لا^{۳} − لا^{۲} − ۴لا + ۱۲ = ۰

(۱۱) لا^{۴} − ۷لا^{۳} + ۱۳لا^{۲} + ۳لا − ۱۸ = ۰

(۱۲) لا^{۴} − ۴لا^{۳} − ۶لا^{۲} + ۳۶لا − ۲۷ = ۰

(۱۳) لا^{۴} + ۱۲لا^{۳} + ۳۳لا^{۲} + ۳۱لا + ۱۰ = ۰

(۱۴) ۲لا^{۴} − ۱۲لا^{۳} + ۱۹لا^{۲} − ۶لا + ۹ = ۰

(۱۵) لا^{۴} + ۱۶لا^{۳} + ۷۹لا^{۲} + ۱۲۶لا + ۹۸ = ۰

(۱۶) ۸لا^{۴} + ۴لا^{۳} − ۱۸لا^{۲} + ۱۱لا − ۲ = ۰

(۱۷) لا^{۵} − لا^{۴} − ۲لا^{۳} + ۲لا^{۲} + لا − ۱ = ۰

(۱۸) لا^{۵} − ۲لا^{۴} − ۶لا^{۳} + ۴لا^{۲} + ۱۳لا + ۶ = ۰

(۱۹) لا^{۵} − ۱۳لا^{۴} + ۶۷لا^{۳} − ۱۷۱لا^{۲} + ۲۱۶لا − ۱۰۸ = ۰

(۲۰) لا^{۶} − ۳ لا^{۵} + ۶ لا^{۳} − ۳ لا^{۲} − ۳ لا + ۲ = ۰

(۲) وہ شرط دریافت کرو جس کہ لا^{ن} − ع لا^{۲} + ر = ۰ کی مساوی قیمتیں ہوں

(۳) اگر لا^{۴} + ع لا^{۳} + ق لا^{۲} + ر لا + ص = ۰ کی تین برابر قیمتیں ہیں تو ثابت کرو کہ

ق^{۲} − ۳ ع ر + ۱۲ ص = ۰

(۴) اگر لا^{ن} + ع$_{۱}$ لا$^{ن-۱}$ + ۰۰۰۰ + ع$_{ن}$ = ۰ کی دو مساوی قیمتیں برابر ط کے ہوں تو ثابت کرو کہ ع$_{۱}$ لا$^{ن-۱}$ + ۲ ع$_{۲}$ لا$^{ن-۲}$ + ۰۰۰ + ن ع$_{ن}$ = ۰ کی ایک قیمت ط ہے

(۵) اگر لا^{۵} + ق لا^{۳} + ر لا^{۲} + ت = ۰ کی دو مساوی قیمتیں ہیں تو ثابت کرو کہ ایک اونھیں سی قیمت مساوات درجہ دوم

لا^{۲} − $\frac{۲ ق^{۲}}{۵ ر}$ لا + $\frac{۵ ت}{۳ ر}$ − $\frac{۴ ق}{۱۵}$ = ۰ ہوگی

باب ۷

(۱) لا^{۶} − ۵ لا^{۵} + لا^{۴} + ۱۲ لا^{۳} − ۲ لا^{۲} + ۱ = ۰ کی منفی اور مثبت قیمتوں کی حدود غائی دریافت کرو

(۲) لا^{۴} − ۸ لا^{۳} + ۱۲ لا^{۲} + ۱۶ لا − ۳۹ = ۰ کو اس طرح لکھو کہ جس سے ثابت ہو کہ ۱۶ اعلیٰ حد غائی مثبت قیمتوں کی ہے

(۳) ثابت کرو کہ معادلات ذیل میں حقیقی قیمتیں حدود غائی جو معین کی گئی ہیں انکے درمیان واقع ہیں

(۱) لا^{۴} − لا^{۳} + ۴ لا^{۲} − ۳ لا + ۱ = ۰ ۔ حدود معینہ $\frac{۱}{۴}$ اور ۱

(۲) لا^{۴} + لا^{۳} − ۱۰ لا^{۲} − لا + ۱۵ = ۰ ۔ حدود معینہ −۴ اور ۳

(۳) لا^{۵} + ۵ لا^{۴} + لا^{۳} − ۱۶ لا^{۲} − ۲۰ لا − ۱۶ = ۰ ۔ حدود معینہ −۵ اور ۴

(۴) (لا^{۳} − ۲۶) (لا^{۲} + ۵ لا + ۱) + ۶۰ لا = ۰ ۔ حدود معینہ −۵ اور ۳

(۵) (لا^{۲} − ۴ لا − ۲)^{۲} − ۴۳ = ۰ ۔ حدود معینہ −۲ اور ۶

(۶) لا^{۵} + لا^{۴} + لا^{۲} − ۲۵ لا − ۳۶ = ۰ ۔ حدود معینہ −۵ اور ۵

(۴) معادلات ذیل میں نیوٹن کی ترکیب سے قیمتوں کی حدود غائی دریافت کرو

(۱) لا^{۴} − لا^{۳} − ۵ لا^{۲} + ۱۸ لا − ۹ = ۰ ۔ (۲) لا^{۴} − ۵ لا^{۲} + ۶ لا − ۱ = ۰

(۳) لا^{۴} − لا^{۳} + ۴لا^{۲} + لا − ۴ = ۰ (۴) لا^{۴} − ۵لا^{۳} + ۱۱لا^{۲} − ۲۰ = ۰

(۵) لا^{۴} − ۲لا^{۳} − ۳لا^{۲} − ۱۵لا − ۳ = ۰

(۵) ثابت کرو کہ لا^{۵} + ۵لا^{۴} − ۲۰لا^{۲} − ۱۹لا − ۳ = ۰ کی ایک قیمت ۲ اور ۳ کے درمیان ہے اور کوئی قیمت بڑی ۳ سے نہیں ہی اور ایک قیمت −۵ اور −۴ کے درمیان واقع ہوتی ہے اور کوئی چھوٹی −۵ سے نہیں ہے

(۶) دفعہ ۱۰۲ کی ترکیب کو معادلات ذیل کی حقیقی قیمتوں کا مقام اور تعداد دریافت کرو

(۱) لا^{۳} − ۱۲لا + ۱۷ = ۰ (۲) لا^{۴} − ۳۲لا + ۲۰ = ۰

(۳) لا^{۳} − ۳لا + ۳ = ۰ (۴) ۴لا^{۳} + ۹لا^{۲} − ۱۲لا + ۲ = ۰

(۵) لا^{ن} − ط لا^{۲} + ش = ۰ (۶) لا^{۲ن} − ع لا^{۲} + ر = ۰

(۷) ثابت کرو کہ مساوات ۳لا^{۴} + ۸لا^{۳} − ۶لا^{۲} − ۲۴لا + ر = ۰ کی چار حقیقی قیمتیں ہیں اگر ر چھوٹا −۸ سی اور بڑا −۱۳ سی ہو اور دو حقیقی قیمتیں ہیں اگر ر بڑا −۸ سی اور چھوٹا ۱۹ سی ہو اور کوئی حقیقی قیمت نہیں ہوگی اگر ر بڑا ۱۹ سے ہو

باب ۸

(۱) معادلات ذیل کی قیمتیں ناطقہ محدودہ دریافت کرو

(۱) لا^{۳} − ۱۰۶لا − ۴۲۰ = ۰ (۲) لا^{۳} − ۹لا^{۲} + ۲۲لا − ۲۴ = ۰

(۳) لا^{۳} − ۲لا^{۲} − ۲۵لا + ۵۰ = ۰ (۴) ۲لا^{۳} − ۳لا^{۲} + ۲لا − ۳ = ۰

(۵) ۲لا^{۳} − ۲لا^{۲} − ۶لا + ۴ = ۰ (۶) ۳لا^{۳} − ۲۶لا^{۲} + ۳۴لا − ۱۲ = ۰

(۷) لا^{۴} − ۲لا^{۳} + ۸لا − ۱۶ = ۰ (۸) لا^{۴} − لا^{۳} − ۱۳لا^{۲} + ۱۶لا − ۴۸ = ۰

(۹) لا^{۴} − لا^{۳} − لا^{۲} + ۱۹لا − ۴۲ = ۰ (۱۰) لا^{۴} + ۸لا^{۳} − ۷لا^{۲} − ۴۹لا + ۵۶ = ۰

(۱۱) لا^{۵} − ۳لا^{۴} − ۹لا^{۳} + ۲۱لا^{۲} − ۱۰لا + ۲۴ = ۰

(۱۲) لا^{۶} − ۷لا^{۵} + ۱۱لا^{۴} − ۷لا^{۳} + ۱۴لا^{۲} − ۲۸لا + ۴۰ = ۰

(۲) امثال مساوات ح (لا) = ۰ میں صحاح ہیں تو ثابت کرو کہ اگر ح (۰) اور ح (۱) دونو طاق اعداد ہوں تو مساوات کی قیمت اعداد صحیح نہیں ہو سکتیں

باب ۹

(۱) معادلات ذیل کو حل کرو ہر ایک دو قیمتیں ا اور - ا کی صورت کی ہیں

(۱) لا^۴ - ۲ لا^۳ - ۲ لا^۲ + ۸ لا - ۸ = ۰ (۲) لا^۴ + ۳ لا^۳ - ۷ لا^۲ - ۲۷ لا - ۱۸ = ۰

(۳) لا^۴ + ۳ لا^۳ + ۲ لا^۲ + ۹ لا - ۳ = ۰ (۴) لا^۴ + لا^۳ - ۱۱ لا^۲ + ۹ لا + ۱۸ = ۰

(۲) معادلات ذیل کو حل کرو ہر ایک کی قیمتیں سلسلہ حسابیہ میں ہیں

(۱) لا^۳ - ۶ لا^۲ + ۱۱ لا - ۶ = ۰ (۲) لا^۳ - ۹ لا^۲ + ۲۳ لا - ۱۵ = ۰

(۳) لا^۴ - ۸ لا^۳ + ۱۴ لا^۲ + ۸ لا - ۱۵ = ۰ (۴) لا^۴ + لا^۳ - ۱۱ لا^۲ + ۹ لا + ۱۸ = ۰

(۳) ان مساواتوں کو حل کرو بعض شرائط جو قیمتوں سے متعلق ہیں وہ اونکے ساتھ بیان کی گئی ہیں

(۱) ۳ لا^۳ - ۲ لا^۲ - ۲۷ لا + ۱۸ = ۰ حاصل ضرب دو قیمتوں کا ۲ ہے

(۲) لا^۴ - ۳ لا^۲ - ۶ لا - ۲ = ۰ حاصل ضرب دو قیمتوں کا - ۱ ہے

(۳) لا^۴ - ۴ لا^۳ + ۵ لا^۲ - ۱۴ لا + ۴ = ۰ حاصل ضرب دو قیمتوں کا ۱ ہے

(۴) ۲ لا^۴ - ۵ لا^۳ + ۱۱ لا^۲ - ۱۱ لا + ۶ = ۰ حاصل ضرب دو قیمتوں کا ۱ ہے

(۵) لا^۴ - ۴۵ لا^۲ - ۴۰ لا + ۸۴ = ۰ حاصل تفریق دو قیمتوں کا ۳ ہے

(۶) لا^۵ - ۷ لا^۴ + ۱۵ لا^۳ - ۱۵ لا^۲ + ۱۴ لا - ۸ = ۰ ایک قیمت دوسری سے دوچند ہے

(۴) معادلات ذیل کو حل کرو اونکی قیمتوں کی صورتیں معین ہیں

(۱) لا^۳ - ۱۰ لا^۲ + ۲۷ لا - ۱۹ = ۰ صورتیں ا و ۳ ا و ۶ ا

(۲) لا^۴ - ۱۰ لا^۳ + ۳۵ لا^۲ - ۵۰ لا + ۲۴ = ۰ صورتیں ا + ۱ و ا - ۱ و ب + ۱ و ب - ۱

(۳) ۶ لا^۶ - ۴۳ لا^۵ + ۱۰۷ لا^۴ - ۱۰۸ لا^۲ + ۳۶ = ۰ اور صورتیں ا و ب و ۱/ا و ۱/ب

(۴) لا^۵ + ۸ لا^۴ + ۵ لا^۳ - ۵۰ لا^۲ - ۳۶ لا + ۷۲ = ۰ صورتیں ا و ۲ ا و ب و ۲ ب و ا + ب

(۵) لا^۶ - ۴ لا^۵ + ۱۰ لا^۴ - ۱۴ لا^۳ + ۴۴ لا^۲ - ۱۱۹ لا + ۵۶ = ۰ صورتیں ا + √ب ± √ج و ± √س

(۶) لا^۶ - ۱۲ لا^۵ - ۲ لا^۴ + ۳۷ لا^۳ + ۱۰۴ لا^۲ - ۱۱ لا - ۱۰ = ۰ و ا ± √ا و ب ± √ب و ± √س

(۵) معادلات ذیل کو حل کرو ہر ایک زوج میں ایک قیمت مشترک ہے

(۱) لا^{۳} − ۳ لا^{۲} − ۱۶ لا − ۱۲ = ۰ و لا^{۳} − ۷ لا^{۲} + ۵ لا + ۱۳ = ۰

(۲) لا^{۳} − ۳ لا^{۲} + ۱۱ لا − ۹ = ۰ و لا^{۳} − ۵ لا^{۲} + ۱۱ لا − ۷ = ۰

(۶) مساوات لا^{۳} − ۷ لا^{۲} + ۳۶ = ۰ اور لا^{۳} − ۳ لا^{۲} − ۱۰ لا + ۲۴ = ۰ کو حل کرو
پہلی مساوات کی ایک قیمت سہ چند دوسری مساوات کی ایک قیمت سے ہے

(۷) معادلات ذیل کو حل کرو جنمیں دو قیمتیں مشترک ہیں

لا^{۴} − ۲ لا^{۳} − ۷ لا^{۲} + ۲۶ لا − ۲۰ = ۰ و لا^{۴} + ۴ لا^{۳} − ۲ لا^{۲} − ۱۲ لا + ۸ = ۰

(۸) م اور ا کی رقموں میں اس مساوات

لا^{۴} + ع ا لا^{۳} + (م^{۲} + م) ا^{۲} لا^{۲} + ق ا^{۳} لا + ا^{۴} = ۰

کی قیمتیں جو سلسلہ حسابیہ میں ہیں دریافت کرو اور ع اور ق کو م اور ا کی رقموں میں تحقیق کرو

باب ۱۰

(۱) ان معادلات متکافیہ کو حل کرو

(۱) لا^{۴} − ۲ لا^{۳} + ۳ لا^{۲} − ۲ لا + ۱ = ۰ (۲) لا^{۴} + ۴ لا^{۳} − ۵ لا^{۲} + ۴ لا + ۱ = ۰

(۳) ۲ لا^{۴} − ۵ لا^{۳} + ۶ لا^{۲} − ۵ لا + ۲ = ۰ (۴) لا^{۴} + ۴ لا^{۳} − ۱۰ لا^{۲} + ۴ لا + ۱ = ۰

(۵) لا^{۵} − ۲ لا^{۴} − ۱۹ لا^{۳} − ۱۹ لا^{۲} − ۲ لا + ۱ = ۰ (۶) لا^{۵} − ۴ لا^{۴} + لا^{۳} + لا^{۲} − ۴ لا + ۱ = ۰

(۷) ۶ لا^{۵} − ۱۱ لا^{۴} − ۳۳ لا^{۳} + ۳۳ لا^{۲} + ۱۱ لا − ۶ = ۰

(۸) ۲ لا^{۶} − ۵ لا^{۵} + ۴ لا^{۴} − ۴ لا^{۲} + ۵ لا − ۲ = ۰

(۹) ۸ لا^{۶} − ۱۶ لا^{۴} − ۲۵ لا^{۳} − ۱۶ لا^{۲} + ۸ = ۰ (۱۰) ۱ + لا^{۵} = ا (۱ + لا)^{۵}

(۲) معادلات ذیل کی قیمتیں دریافت کرو اور انکا تنزل کرو

(۱) لا^{۷} − ۲ لا^{۵} + لا^{۴} + لا^{۳} − ۲ لا^{۲} + ۱ = ۰

(۲) لا^{۷} + ۲ لا^{۶} − ۸ لا^{۵} − ۷ لا^{۴} − ۷ لا^{۳} − ۸ لا^{۲} + ۲ لا + ۱ = ۰

(۳) لا^{۸} + ۲ لا^{۷} + ۳ لا^{۶} + ۲ لا^{۵} − ۲ لا^{۳} − ۳ لا^{۲} − ۲ لا − ۱ = ۰ (۴) لا^{ن} − ۱ = ۰

(۳) $لا^{۴} + ع\, لا^{۲} + ۱ = ۰$ کی قیمتون کو

ا د ب و $\frac{۱}{ا}$ و $\frac{۱}{ب}$ کی صورت مین نمایان کرو

(۴) اگر ا و ب و س قیمتین مساوات مکررہ کی تعبیر کرین تو

$$لا^{ن} + ع\, لا^{ن-۱} + ق\, لا^{ن-۲} + \dots + ق\, لا^{۲} + ع\, لا + ۱ = ۰$$

$$\frac{ا^{۲}}{ب^{۲}} + \frac{ا^{۲}}{س^{۲}} + \dots + \frac{ب^{۲}}{ا^{۲}} + \frac{ب^{۲}}{س^{۲}} + \dots + \frac{س^{۲}}{ا^{۲}} + \dots = (ع^{۲} - ۲ق)^{۲} - ن$$

(۵) مساوات مکررہ $لا^{۲ن} - ع\, لا^{۲ن-۱} + \dots = ۰$ مین اگر قیمتین علی التبادل مثبت اور منفی هون اور ع بڑا ۲ن سی نہ هو تو قیمتین تمام حقیقی نهین هونگین

باب ۱۱

(۱) معادلات ذیل کو حل کرو

(۱) $لا^{۶} - ۱ = ۰$ (۲) $لا^{۸} - ۱ = ۰$ (۳) $لا^{۸} + ۱ = ۰$

(۲) ثابت کرو کہ اجزاء ضربی $ا^{۳} + ب^{۳} + س^{۳} - ۳ا ب س$ کی صورتین $ا + ب ے + س ے^{۲}$ هین جسمین $ے^{۳} - ۱ = ۰$

(۳) ثابت کرو کہ اجزاء ضربی

$$ا^{۲}(ا^{۲} - ۴ب د - س^{۲}) - ب^{۲}(ب^{۲} - ۴ا س - د^{۲}) + س^{۲}(س^{۲} - ۴ب د - ا^{۲}) - د^{۲}(د^{۲} - ۴ا س - ب^{۲})$$

کے اس صورت $ا + ب ک + س ک^{۲} + د ک^{۳}$ کے هین جن مین $ک^{۴} - ۱ = ۰$

باب ۱۲

(۱) ان مساواتون کو حل کرو

(۱) $لا^{۳} - ۳لا - ۲ = ۰$ (۲) $لا^{۳} - ۹لا - ۲۸ = ۰$

(۳) $لا^{۳} - لا + ۶ = ۰$ (۴) $لا^{۳} + ۳لا = \frac{۳}{۴}$

(۵) $۳لا^{۳} - ۶لا^{۲} - ۲ = ۰$ (۶) $لا^{۳} - ۱۵لا^{۲} - ۳۳لا + ۸۴۷ = ۰$

(۷) $لا^{۳} + ۱۲ا\, لا^{۲} = ۶۳ا^{۳}$ (۸) $لا^{۳} - ۳(ا^{۲} + ب^{۲})لا = ۲ا(ا^{۲} - ۳ب^{۲})$

(۲) مساوات $لا^{۳} + ق\, لا + ر = ۰$ کی یہہ صورت $لا^{۴} = (لا^{۲} + ا\, لا + ب)^{۲}$ بن جای اسکی واسطی ق اور ر مین کیا ارتباط ہونا ضرور ہے

اور پہر اوس ارتباط سے مساوات $۸ لا^{۳} - ۳۶ لا + ۲۷ = ۰$ حل کرو

(۳) اگر مساوات $لا^{۳} + ع\, لا^{۲} + ق\, لا + ر = ۰$ کی قیمتین سلسلہ ہندسہ مین ہون تو $ر\, ع^{۳} = ق^{۳}$

اسی مساوات $لا^{۳} - لا^{۲} + ۲ لا - ۸ = ۰$ کو حل کرو

(۴) اگر مساوات $لا^{۳} + ق\, لا + ر = ۰$ کی قیمتین بقدر ھ کے کم کیجایئن تو ثابت کرو ہئت بدلی ہوئی مساوات جو حاصل ہوگی اوسکی قیمتین سلسلہ ہندسہ مین ہونگین بشرطیکہ ھ ایسا ہو کہ

$۲۷ ر\, ھ^{۳} - ۹ ق^{۲} ھ^{۲} - ق^{۳} = ۰$

(۵) اگر مساوات $لا^{۳} + ۳ ع\, لا^{۲} + ۳ ق\, لا + ر = ۰$ کی قیمتین سلسلہ موسیقہ مین ہو تو

$۲ ق^{۳} = ر(۳ ع ق - ر)$

(۶) اگر مساوات $لا^{۳} + ۳ ع\, لا^{۲} + ۳ ق\, لا + ر = ۰$ کی قیمتین سلسلہ موسیقہ مین ہون تو مساوات $ر\, لا^{۲} + ۲ ق^{۲} لا + ق\, ر = ۰$ مین سب سے بڑی اور سب سی چہوٹی قیمتین شامل ہونگین

(۷) $لا^{۳} + ق\, لا + ر = ۰$ کی ناممکن قیمتین صورت $س \pm ص \sqrt{-۱}$ کی ہین تو ثابت کرو کہ $ص^{۲} = ۳ س^{۲} + ق$

(۸) اگر ر و $س + \sqrt{ص}$ و $س - \sqrt{ص}$ مین قیمتین مساوات $لا^{۳} + ع_{۱} لا^{۲} + ع_{۲} لا + ع_{۳} = ۰$ کی ہون اونمین سی ر حقیقی قیمت ہی اور مساوات $لا^{۳} + م_{۱} لا^{۲} + م_{۲} لا = ۰$ اسطرح پیدا ہوتی ہو کہ اوپر کی مساوات کی قیمتین بقدر ر کے کم کردین تو ثابت کرو کہ

$س = -\frac{م_{۱}}{۲} + ر$ اور $ص = -\frac{۱}{۴}(م_{۲} + ۳ ع_{۲} - ع_{۱}^{۲})$

(۹) مساوات $لا^{۳} + ع\, لا^{۲} + ق\, لا + ر = ۰$ کو صورت $د^{۳} - ۳ د + م = ۰$ کی طرف $لا = ا\, د + ب$ فرض کرکی تحویل کرو اور اس مساوات کو $د = ی + \frac{۱}{ی}$ فرض کرکے حل کرو اور اسی ثابت کرو کہ اگر اصلی مساوات کی برابر قیمتین ہون تو

۴(ع^{۲} - ۳ق)^{۳} = (۲ع^{۳} - ۹ع ق + ۲۷ر)^{۲}

(۱۰) اگر مساوات لا^{۳} + ع لا^{۲} + ق لا + ر = ۰ کی قیمتین سلسلہ موسیقہ مین ہین تو اس مساوات کی قیمتین بھی سلسلہ موسیقہ مین ہونگین

(ع ق - ر) ی^{۳} - (ع^{۲} - ۲ع ق + ۳ر) ی^{۲} + (ع ق - ۳ر) ی - ر = ۰

باب ۱۳

(۱) معادلات ذیل کو حل کرو

(۱) لا^{۴} ± ۴لا^{۳} + ۳لا^{۲} - ۴۴لا - ۸۴ = ۰ (۲) لا^{۴} - ۶لا^{۲} - ۸لا - ۳ = ۰

(۳) لا^{۴} - ۲۱لا^{۳} + ۹۴لا^{۲} - ۸۷لا + ۴۰ = ۰

(۴) لا^{۴} - ۲ا لا^{۳} + (ا^{۲} - ۲ب^{۲}) لا^{۲} + ۲اب^{۲} لا - ا^{۲}ب^{۲} = ۰ دفعہ ۱۹۲

(۲) اگر ر^{۲} - ع^{۲} ص = ۰ تو مساوات لا^{۴} + ع لا^{۳} + ق لا^{۲} + ر لا + ص = ۰ مساوات درجہ دوم کی طرح حل ہوجائیگی

(۳) اگر ص اور ع مثبت ہون اور ۲۷ع^{۴} چھوٹی ۲۵۶ ص سی ہو تو مساوات لا^{۴} + ع لا^{۳} + ص = ۰ کی قیمتین سب خیالی ہونگین

(۴) مساوات لا^{۴} + ق لا^{۲} + ر لا + ص = ۰ کی قیمتین صورت سہ ± صہ$\sqrt{-1}$ فرض کرکے ثابت کرو کہ سہ اور صہ کی قیمتین ان مساواتون سی دریافت ہوسکتی ہین کہ

۶۴ سہ^{۶} + ۳۲ق سہ^{۴} + (۴ق^{۲} - ۱۶ص) سہ^{۲} - ر^{۲} = ۰ و صہ^{۲} = سہ^{۲} + $\frac{ق}{۲}$ + $\frac{ر}{۴سہ}$

باب ۱۴

(۱) معادلات ذیل مین قیمتین بعض سٹرم کے جملون کی متعین ہوچکی ہین اونکی حقیقی قیمتون کا مقام حسب ضابطہ سٹرم صاحب کی دریافت کرو

(۱) لا^{۴} - ۴لا^{۳} - ۳لا + ۲۳ = ۰ و ح$_{۳}$(لا) = -۱۹۴لا + ۱۳۷۱ و ح$_{۴}$(لا) = -

(۲) لا^{۴} - ۴لا^{۳} + لا^{۲} + ۶لا + ۲ = ۰ و ح$_{۲}$(لا) = ۵لا^{۲} - ۱۰لا - ۷ و ح$_{۳}$(لا) = لا - ۲

ح٫ (۴) = +

(۳) لا^۴ + لا^۳ + لا − ۱ = ۰ و ح٫ (لا) = ۳ لا^۲ − ۱۲ لا + ۱۷ دفعہ ۱۹۹

(۴) لا^۵ − ۲ لا^۴ + لا^۳ − ۸ لا + ۶ = ۰ و ح٫ (لا) = ۱۶ لا^۲ − ۲۳ لا + ۹

(۵) لا^۵ + ۵ لا^۴ − ۲۰ لا^۲ − ۱۹ لا − ۲ = ۰ و ح٫ (لا) = ۲۰ لا^۳ + ۶۰ لا^۲ + ۳۶ لا − ۹

ح٫ (لا) = ۹۶ لا^۲ + ۱۸۷ لا + ۶۷ و ح٫ (لا) = ۱۶۵ لا ۴۳۶۵ + ۱ ۷۵ ۴ ۵

ح٫ (لا) = +

(۲) سٹرم کی ضابطہ سے ثابت کرو کہ معادلات ذیل مین ایک حقیقی قیمت ہے اور اوسکا مقام دریافت کرو

(۱) لا^۳ + ۹ لا^۲ + ۱۰ لا − ۱ = ۰ (۲) لا^۳ − ۶ لا^۲ + ۸ لا + ۴۰ = ۰

(۳) مساوات لا^۶ − ۲ لا^۳ + ۳ لا^۲ − ۵ لا − ۱ = ۰ مثبت قیمتون کا مقام معلوم ہے اور معلوم ہی کہ ح٫ (لا) = ۶ لا (لا − ۱)^۲ + ۱۹ لا + ۶

(۴) معادلات ذیل مین سٹرم کے ضابطہ کو کام مین لاؤ

(۱) لا^۳ + لا^۲ − ۳ لا − ۱ = ۰ (۲) لا^۳ − ۴ لا^۲ − ۴ لا + ۲۰ = ۰

(۳) لا^۴ + ۲ لا^۲ − ۴ لا + ۱۰ = ۰ (۴) لا^۶ − لا + ۱ = ۰

باب ۱۵

(۱) ثابت کرو کہ مساوات

لا^۵ − ۳ لا^۴ − ۲۴ لا^۳ + ۹۵ لا^۲ − ۴۶ لا − ۱۰۱ = ۰

کی تمام حقیقی قیمتین درمیان − ۱۰ اور ۱۰ کے ہین اور ایک حقیقی قیمت اوسکی − ۱۰ اور − ۱ کے درمیان اور ایک قیمت − ۱ اور ۰ کے درمیان اور کوئی قیمت ۰ اور ۱ کے درمیان نہین ہے اور کم سے کم ایک قیمت ۱ اور ۱۰ کے درمیان ہے

(۲) اس مساوات مین ضابطہ فوریر کو کام مین لاؤ کہ

لا^۴ + ۳ لا^۳ + ۷ لا^۲ + ۱۰ لا + ۱ =

باب ۱۶

(۱) لاگرانثر کی ترکیب کے موافق مثبت تقریبی قیمت مساوات ۳ لا^۲ - ۴ لا - ۱ = ۰ کی دریافت کرو

(۲) لاگرانثر کی ترکیب کے موافق مساوات لا^۴ + لا^۳ - ۲ لا^۲ - ۳ لا - ۳ = ۰ تقریبی قیمتین ۱ اور ۲ کے درمیان دریافت کرو

باب ۱۷

(۱) حدود غائی جو معین کی گئی ہین اونکی درمیان جو قیمتین معادلات ذیل کی واقع ہون اونکو نیوٹن صاحب کی ترکیب سے نکالو

(۱) لا^۲ - ۴ لا - ۱۲ = ۰ قیمت ۲ اور ۳ کی درمیان

(۲) لا^۳ - ۴ لا^۲ - ۷ لا + ۲۴ = ۰ قیمت ۲ اور ۳ کے درمیان

(۳) لا^۳ - ۴۲ لا + ۴۴ = ۰ قیمت ۲،۳ و ۳،۲ کے درمیان

(۴) لا^۳ - ۵ لا - ۵ = ۰ قیمت ۱۴ اور ۱،۴ کے درمیان

(۵) لا^۴ - ۸ لا^۳ + ۱۲ لا^۲ + ۸ لا - ۴ = ۰ قیمت ۱۰ اور ۱ کے درمیان

(۲) معادلات ذیل کی ایک قیمت کی دریافت کرنی مین نیوٹن صاحب کی ترکیب کام مین لاؤ

(۱) لا^۳ + ۳ لا - ۵ = ۰ (۲) لا^۴ - ۲ لا^۳ - ۳ لا + ۲۰ = ۰

باب ۱۸

( ) معادلات ذیل مین جو حدود غائی متعین کی گئی ہین اونکی درمیان معادلات کی قیمت ہورنر کی ترکیب سے دریافت کرو

(۱) لا^۳ + ۱۰ لا^۲ + ۶ لا - ۱۲۰ = ۰ قیمت درمیان ۲ و ۳

(۲) لا^۴ - ۲ لا^۳ + ۲۱ لا - ۲۳ = ۰ قیمت درمیان ۱ اور ۲ کے

(۳) لا^۴ - ۵ لا^۳ + ۳ لا^۲ + ۳۵ لا - ۷۰ = ۰ قیمت درمیان ۱۲ اور ۳ کے

(۲) حل کرو مساوات لا^۲ - ۱۷ = ۰ کو موافق ہورنر کی ترکیب کی

(۳) قیمتوں کا حساب ہورنر کی ترکیب کے موافق معادلات ذیل کا کرو

(۱) لا^۳ + لا - ۳ = ۰ (۲) لا^۳ + ۲ لا - ۲۰ = ۰

(۳) ۳ لا^۳ + ۵ لا - ۴۰ = ۰ (۴) لا^۳ + ۱۰ لا^۲ + ۸ لا - ۱۲۰ = ۰

باب ۱۹

(۱) مساوات لا^۳ + ع لا^۲ + ق لا + ر = ۰ کی قیمتوں ا و ب و س کی بالقرینہ جملوں کی قیمت دریافت کرو

(۱) (ا + ب + ا ب) (ب + س + ب س) (س + ا + س ا)

(۲) (ا + ب - ۲ س) (ب + س - ۲ ا) (ا + س - ۲ ب)

(۳) حج (ا + ب)^۲ (ا + س) (۴) حج (ا + ب - ۲ س) (ب + س - ۲ ا)

(۵) حج ا ب / (ا + ب) (۶) حج ا^۲ / ب س (۱ + ب/ا) (۱ + س/ا)^۲

(۷) (ب - س)^۲ (س - ا)^۲ (ا - ب)^۲

(۲) اگر ا و ب و س قیمتیں مساوات

لا^۴ + ع لا^۳ + ق لا^۲ + ر لا + س = ۰

کی ہوں تو قیمت حج (ا + ب) (س + د) کی دریافت کرو

(۳) مساوات لا^ن + ع₁ لا^ن-۱ + ۰ ۰ + ع ن-۱ لا + ع ن = ۰ کی قیمتیں ا و ب و س ۰ ۰ ل فرض کرکے دریافت کرو

(۱) حج ا^۲ ب (۲) حج (ا + ب) (ا + س) ۰ ۰ (ا + ل)

(۳) حج (ا + ب)^۲ / ا ب (۴) حج ا^۲ / ب

(۵) ایسی مساوات بناؤ جسکی قیمتیں مساوات لا^۴ + ع لا^۳ + ر لا + س = ۰ کی ہر تین قیمتوں کی مجموعوں کی مجذور کے برابر ہوں اور نیز ایسی مساوات ہی بناؤ کہ جسکی قیمتیں برابر

ہر تین قیمتوں کی مجذوروں کے مجموعہ کے ہو

(۵) اگر ص۱ اور ص۲ و ص۳ . . . مجموعہ اول اور دوم اور سوم . . . مساوات ح (لا) = . کی قیمتوں کا ہو اور مساوات ن درجہ کی ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{لا ح' (لا)}{ح لا} = ن + \frac{ص_1}{لا} + \frac{ص_2}{لا^2} + \frac{ص_3}{لا^3} + \ldots$$

(۶) اگر مساوات $لا^ن + ع_1 لا^{ن-1} + ع_2 لا^{ن-2} + ع_3 لا^{ن-3} + \ldots + ع_ن = 0$

ایک اور صورت مین تبدیل ہو جسکی قیمتین اصلی مساوات کی قیمتوں کی ہر زوج کی برابر ہون تو اول مین امثال بدلی ہوئی مساوات کی دریافت کرو

باب ۲۰

(۱) معادلات ذیل کو اون مساواتوں کی صورت مین تبدیل کرو جنکی قیمتین اصلی معادلات کی قیمتوں کی فرقوں کی مجذور ہون

(۱) $لا^3 - 4 لا + 2 = 0$ (۲) $لا^4 + 4 لا + 3 = 0$ (۳) $لا^4 + 1 = 0$

(۲) لاکو ان مساواتون $ا لا^2 + ب لا + س = 0$ اور $ا' لا^2 + ب' لا + س' = 0$ سے ساقط کرو

باب ۲۱

(۱) معادلات ذیل کی قیمتوں کی جو قوت متعین کی گئی ہی وہ دریافت کرو

(۱) $لا^4 - لا^3 - 19 لا^2 + 49 لا - 30 = 0$ مین مکعب

(۲) $لا^5 - 3 لا^3 - 5 لا + 1 = 0$ مین چوتھی قوت

(۳) $لا^5 - 2 لا^4 - 22 لا^3 - 28 لا^2 + 72 لا + 144 = 0$ مین مکعب

(۴) $لا^4 + 4 + 1 = 0$ مین معکوس مربعات

(۵) $لا^3 - لا - 1 = 0$ مین چھٹی قوت

(۶) اگر مساوات $لا^ن + لا + 1 = 0$ کی قیمتوں کی ر دین قوتوں کا مجموعہ $ص_ر$ سے تعبیر کیا جاے اور ر اور ان کی متکافی قیمتوں کی ر دین قوت کا مجموعہ $ح_ر$ سے

تو ثابت کرو کہ

ص ن-۱ - ص ن = ۱ اور ح ن-۱ - ح ن = ن - ۲ (-۱)^ن

(۴) مساوات لا^ن - لا^۲ + ۱ = ۰ مین ن کو ۳ سے بڑا فرض کرکے ح ا^{ن-۳} و ح ا^{ن-۲} اور ح ا^ن کو دریافت کرو

(۵) مساوات لا^۲ - ع لا + ق = ۰ مین ن کو بڑا رسی فرض کرکے قیمتون کی روین قوتون اور (۲ن) وین قوتون کا مجموعہ دریافت کرو

باب ۲۲

(۱) ان مساواتون کو حل کرو

(ی-۱) لا^۲ + ی لا + ی^۲ - ۲ی = ۰

(ی-۱) لا + ی = ۰

(۲) ان مساواتون کو حل کرو

(ی-۱) لا^۳ + ی (ی+۱) لا^۲ + (۳ی^۲ + ی - ۲) لا + ۲ی = ۰

(ی-۱) لا^۲ + ی (ی+۱) لا + ۳ی^۲ - ۱ = ۰

(۳) ثابت کرو کہ ذیل کی مساواتون کا کوئی حل نہیں ہے

ی لا^۲ - (ی^۲ - ۳ی - ۱) لا + ی = ۰

لا^۲ - ی^۲ + ۳ = ۰

باب ۲۳

(۱) مساوات ی^۴ لا - ی^۳ لا^۲ + ۳ی لا^۳ - ی^۲ لا + ۴ی - ۲ لا = ۰ مین ی کی ہر یک قیمت لا کی قواے متنازلہ مین جب پھیلائی جائی تو اوسکی اول رقم ہر یک قیمت مین دریافت کرو

(۲) مساوات لا^۲ + لا^۱۱ + لا^۸ ی - لا^۵ ی^۲ + ۲لا^۷ ی^۲ + لا^۴ ی^۳ - لا^۴ ی^۴ + ی^۶ - ۳ لا^۲ ی^۹ + لا^۱۴ ی^۱۳ = ۰ مین ی کی ہر یک قیمت لا کی قواے متصاعدہ مین جب پھیلائی جاوی تو اوسکی اول رقم ہر یک قیمت مین دریافت کرو

امثلہ متفرقہ

(۱) اگر ق مقادیر ا و ب و س ۰ ۰ ہون اور ن جملے اس صورت

$$\frac{(لا - ب)\ (لا - س)\ \cdot\ \cdot\ \cdot}{(ا - ب)\ (ا - س)\ \cdot\ \cdot\ \cdot}$$ کے

لئی جائین تو ثابت کرو کہ ان جملون کا مجموعہ واحد ہے

(۲) مساوات $لا^5 + ۵ لا^4 + ۲۰۰ لا^3 - ۱۱ لا + ۶ = ۰$ مین وہ رقم دور کرو جسمین

لا کا مکعب ملتف ہے

(۳) بتلاؤ کہ ایک مساوات کو جسمین دو تغیرات اور تواترات ہون کسطرح ایسی مساواتون مین تبدیل کرین کہ

(۱) جسمین صرف تواترات علامت ہون (۲) جسمین صرف تغیرات ہون

(۴) اگر ع اور ق مثبت ہون تو مساوات $لا^ن - ع لا^ر + ق = ۰$ کی

چار حقیقی مختلف قیمتین ہونگی اگر $\left(\frac{ر ع}{ن}\right)^ن$ بڑا بہ نسبت $\left(\frac{ر ن}{ن - ر}\right)^{ن - ر}$ کے ہو

اور کوئی حقیقی قیمت نہین ہوگی اگر $\left(\frac{ر ع}{ن}\right)^ن$ چھوٹا بہ نسبت $\left(\frac{ر ق}{ن - ر}\right)^{ن - ر}$

کے ہو اور اوسکی دو زوج قیمتون کی برابر ہونگی اگر $\left(\frac{ر ع}{ن}\right)^ن = \left(\frac{ر ق}{ن - ر}\right)^{ن - ر}$

(۵) اگر $- ع_{ن - ق}\ لا^{ن - ق}$ و $- ع_{ن - ر}\ لا^{ن - ر}$ و $- ع_{ن - ص}\ لا^{ن - ص}$ . . .

منفی رقمین ایک ن درجی کی مساوات کی ہو تو سب سے بڑی قیمت مساوات کی

مقادیر $(ع_{ن - ق})^{\frac{1}{ق}}$ و $(ع_{ن - ر})^{\frac{1}{ر}}$ و $(ع_{ن - ص})^{\frac{1}{ص}}$ . . .

مین سب سے بڑی دو مقدارون کے مجموعہ کے برابر ہوگی

(۶) اگر ن درجہ کی مساوات کی اخر رقم ک ہو اور اس مساوات کی قیمتین سلسلہ ہندسیہ مین ہون

تو ثابت کرو کہ اگر ن طاق ہو تو $ک^{\frac{1}{ن}}$ قیمت مساوات کی ہوگی

اور ثابت کرو کہ اسیطرح ایک قیمت اوس طاق درجہ کی مساوات کی جسکی قیمتین سلسلہ

حسابیہ مین یا سلسلہ موسیقیہ مین ہون دریافت ہو سکتی ہے

(۷) وفق اعظم

$$لا^5 - ۶ لا^4 + ۷ لا^3 + ۷ لا^2 - ۶ لا - ۳ = ۰$$

اور $لا^۳ - لا^۲ - ۳لا - ۱ = ۰$ کا دریافت کرو اور مساوات

$$لا^۵ - ۶لا^۴ + ۷لا^۳ + ۷لا^۲ - ۶لا - ۳ = ۰$$

کو حل کرو

(۸) مساوات $لا^۴ + ق لا^۲ + ر لا + ص = ۰$ کی قیمتیں بقدر ھ کے کم کرو
اور ھ کی ایسی قدر مقرر کرو کہ بدلی ہوئی مساوات کی قیمتیں صورت
ا و $\frac{۱}{ا}$ د ب و $\frac{۱}{ب}$ کی ہوں اور بتلاؤ کہ یہہ مساوات کسطرح حل ہو سکتی ہے

مثال $لا^۴ - ۲لا^۲ + ۱۶لا + ۱ = ۰$

(۹) جبریہ جملوں کے جذر نکالنے کا جو عمل ہی اوسے ثابت کرو کہ مساوات $لا^۴ + ع لا^۳ + ق لا^۲ + ر لا + ص = ۰$
کی تحویل درجہ دوم کی مساواتوں کی طرف ہو جائیگی اگر $ع^۲ ص - ۴ق ص + ر^۲ = ۰$
یا اگر $ع^۳ - ۴ع ق + ۸ر = ۰$

(۱۰) ثابت کرو کہ مساوات $لا^۴ + \frac{۳}{۲} ق لا^۲ + ر لا + ص = ۰$ تمام حقیقی قیمتیں نہیں
ہو سکتیں اگر $ق^۳ + ر^۲$ مثبت ہو

(۱۱) اگر ح (لا) جملہ ناطقہ صحیحہ لا کا ہو تو کیا ح (لا) = ۰ یا ح' (لا) = ۰ کی یقینی ایک حقیقی قیمت ہے،

(۱۲) ایک مساوات مکعبی قیمتوں کا یہہ جملہ $ا^۲ ب + ب^۲ س + س^۲ ا$ نصف بالقرینہ ہے
تو بتاؤ اوسکی قیمت کیونکر دریافت کریں

(۱۳) فرض کرو کہ ا و ب و س و . . . ک ن درجہ کی مساوات ح (لا) = ۰ کی
قیمتیں ہوں اور اپنی سادی صورتوں میں لکھی ہوں اور یہہ سب قیمتیں غیر مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ جملہ

$$\frac{ا^ر}{ح'(ا)} + \frac{ب^ر}{ح'(ب)} + \frac{س^ر}{ح'(س)} + \cdots + \frac{ک^ر}{ح'(ک)}$$

برابر واحد کے ہی اگر ر = ن - ۱ اور برابر صفر کی ہی اگر ر برابر صفر کے ہے یا اوس
مثبت صحیح عدد کی ہی جو ن - ۱ سی کم ہی اور یہہ بھی ثابت کرو کہ اگر
ر = -۱ تو جملہ = $\frac{(-۱)^{ن-۱}}{ا ب س \cdots ک}$

(۱۴) اگر ح (لا) = لاⁿ − ۱ اور ا و ب و س ۰ ۰ قیمت ح (لا) = ۰ کی ہیں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ن لا}^{\text{ن}-۱}}{\text{لا}^{\text{ن}}-۱} = \frac{۱}{\text{لا}-\text{ا}} + \frac{۱}{\text{لا}-\text{ب}} + \frac{۱}{\text{لا}-\text{س}} + \cdots$$

(۱۵) ثابت کرو کہ صحیح حصہ $\frac{۱}{\sqrt{۳}}(\sqrt{۳}+\sqrt{۵})^{۲\text{ن}-۱}$ پورا $۲^{\text{ن}}$ پر تقسیم ہوتا ہے

جوابات

پہلا باب (۱) $\text{لا}^{۴} + ۱۱\text{لا}^{۳} + ۴۷\text{لا}^{۲} + ۲۰۵\text{لا} + ۸۳۰$ اور باقی ۳۳۰۶

دوسرا باب (۱) $\left(\frac{۱+\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۳}}\right)^{\frac{۱}{۲}} + \left(\frac{۱-\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۳}}\right)^{\frac{۱}{۲}}\sqrt{-۱}$ (۲) $\frac{۱}{\sqrt{۳}} + \frac{\sqrt{-۱}}{\sqrt{۳}}$

تیسرا باب (۷) −۱ و −۴۴ و ۱۲۱ (۸) س = ۵ و ص = ۲

(۹) $-\text{ع}_۱^{۳} + ۳\text{ع}_۱\text{ع}_۲ - ۳\text{ع}_۳$ (۱۰) $\text{لا}^{۴} - ۲\text{لا}^{۳} - ۲\text{لا} + ۱ = ۰$ دفعہ ۴۸ دیکھو

(۱۱) $(\text{ع}_۱^{۲} - ۲\text{ع}_۲)$ $\frac{\text{ع}_{\text{ن}-۱}^{۲} - ۲\text{ع}_{\text{ن}}\text{ع}_{\text{ن}-۲}}{\text{ع}_{\text{ن}}^{۲}}$ − ن (۱۳) دفعہ ۴۵ کے

مطابق اس میں متواتر $\sqrt{-۱}$ اور $-\sqrt{-۱}$ کو لا کے جگہ رکھو

چوتھا باب (۵) قیمتیں ۴ و ۴ ± ۷ $\sqrt{-۱}$ (۷) $\text{ی}^{۴} - ۲\text{ی}^{۲} + \frac{۲}{۳} = ۰$

(۸) دفعہ ۲۲ و ۵۰ دیکھو (۱۵) ۱۴ مثال کو کام میں لاؤ

چھٹا باب (۱) (۱۵) −۷ قیمت (۱۶) $\frac{۱}{۲}$ قیمت ہے

(۱۷) قیمت ایک دفعہ آتی ہے (۱۸) قیمت −۱ تین دفعہ واقع ہوتی ہے

(۱۹) ۲ اور ۳ قیمتیں ہیں (۲) ۱ اور −۱ مکررہ قیمتیں ہیں

(۳) فرض کرو کہ جو قیمت مکرر آتی ہے وہ ا سی اور دوسری قیمت ب سی تعبیر ہو تو دائیں طرف کا رکن مساوات مفروضہ کا مطابق $(\text{لا}-\text{ا})^{۳}(\text{لا}-\text{ب})$ ہوگا اور

پھر امثال برابر لکھنے سے مطلب حاصل ہوگا

ساتواں باب (۷) قیمتیں ح (لا) = ۰ کی −۲ و ۳ و ۱ ہیں دفعہ ۱۰۲ کو کام میں لاؤ

آٹھواں باب ۱ (۴) $\frac{۳}{۲}$ (۶) $\frac{۴}{۳}$

نواں باب ۲ (۳) −۱ و ۱ و ۳ و ۵ (۴) −۴ و ۲۰ و −۲ و ۲۰ و ۲۶

$\frac{1}{2}$ [ص ن - ۱ - ع ۱ ص ن - ۲ + ع ۲ ص ن - ۳ - ۔۔۔ + (-۱)ن ع ن ص - ۱]

(۳) $\frac{ع_۱ ع_ن}{ع_ن}$ + ن۲ - ۲ن (۴) - ن - $\frac{(ع_۱^۲ - ۲ع_۲) ع_ن - ۱}{ع_ن}$

(۶) فرض کرو کہ بدلی ہوئی مساوات

لام + ق۱ لام-۱ + ق۲ لام-۲ + ق۳ لام-۳ + ۔۔۔ = ۰

تو م = $\frac{ن (ن - ۱)}{۲}$ اب بدلی ہوئی مساوات کی قیمتوں کے قوار کا مجموعہ دریافت کرتی ہیں اور بہراشال موافق دفعہ ۲۴۴ کے تو یہہ حاصل ہوگا

ق۱ = (ن - ۱) ع۱ د ق۲ = $\frac{(ن - ۱)(ن - ۲)}{۲}$ ع۱۲ + (ن - ۲) ع۲

ق۳ = $\frac{(ن - ۱)(ن - ۲)(ن - ۳)}{۳!}$ ع۱۳ + (ن - ۲)۲ ع۱ ع۲ + (ن - ۴) ع۳

باسیسوان باب ۲۲ ی۲ - ۲ی = ۰ اور (ی - ۱) لا + ی = ۰ ی۲ - ۱ = ۰ اور (ی - ۱) لا + ۲ی = ۰

سے حل معلوم ہوئے ہیں

تیئیسوان باب ۲۳ ۱ ی = لا + ۔۔ ذ ی = ± $\sqrt{۳ لا}$ + ۔۔ د ی = $\frac{۲}{۳ لا^۲}$ + ۔۔

(۲) چھہ قیمتیں صورت ی = لا۲ (لو + ی) کی ہیں جسمیں لو اس مساوات

۱ - لو۲ - لو۴ + لو۶ = ۰ سی دریافت ہوتا ہے قیمتیں

ی = لا$^{\frac{1}{3}}$ (لو + ی) کی اسمیں ۱ - ۳ لو۲ = ۰ سی لو دریافت ہوتا ہے

چار قیمتیں اس صورت ی = لا$^{\frac{1}{4}}$ (لو + لو) اسمیں ۳ - ی۴ = ۰

سے لو دریافت

امثال متفرقہ (۱) مجموعہ کو ح (لا) سے تعبیر کرو اور ثابت کرو کہ ح (لا) - ۱ منطابق صفر کے بموجب دفعہ ۳۹ کے ہے

(۲) ی۶ - ۱۲ی۵ + ۶۵ی۴ - ۲۰۰ی۳ + ۳۷۲ی۲ - ۳۸۲ی - ۱۴۲۸ = ۰

(۱۵) مساوات درجہ دوم کی بناؤ جسکی قیمتیں $\sqrt{۲۶}$ + $\sqrt{۵۶}$ اور $\sqrt{۲۶}$ - $\sqrt{۵۶}$ ہو

اور دفعہ ۲۶۱ کو کام میں لاؤ الجبرا کی دفعہ ۵۲۷ دیکھو فقط تمام شد